PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

APPLICATIONS

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}.
Quai des Grands-Augustins, 55.
64544-22

PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

APPLICATIONS

PAR

P. APPELL,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
RECTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

E. LACOUR,
MAITRE DE CONFÉRENCES
A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

DEUXIÈME ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE

Avec le concours de R. GARNIER,
Professeur à l'Université de Poitiers.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1922

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Les Traités sur les fonctions elliptiques imprimés en France sont des Traités complets destinés spécialement aux mathématiciens : la plupart d'entre eux prennent comme point de départ les théorèmes généraux de la théorie des fonctions; dans tous, l'étude des fonctions elliptiques est envisagée au point de vue le plus général et poussée le plus loin possible (multiplication, division, transformation, équations modulaires, multiplication complexe).

Nous nous sommes proposé de faire un *Traité des Fonctions elliptiques*, d'un caractère élémentaire, en un seul Volume, contenant les principes essentiels de la Théorie et montrant, par des applications simples, combien ces fonctions sont utiles pour la résolution de certaines questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique mathématique.

La Théorie des fonctions elliptiques est comme une Trigonométrie d'un ordre plus élevé; nous nous sommes limités dans notre exposé aux principes fondamentaux; ces principes étant bien compris, les parties plus profondes de la Théorie deviennent facilement accessibles.

Pour réduire au minimum les emprunts à la Théorie des fonctions, nous prenons comme point de départ la notion du développement d'une fonction uniforme par la formule de Taylor; nous ne nous servons pas de la théorie de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Nous donnons, dans une courte introduction, la définition des

quelques termes tirés de la Théorie des fonctions, qui sont employés dans l'Ouvrage.

La Théorie des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques est d'abord exposée par les méthodes mêmes qui sont employées ensuite pour les fonctions elliptiques. Le lecteur voit ainsi, sur des fonctions simples avec lesquelles il est familiarisé, l'enchaînement des raisonnements et des théorèmes qu'il rencontrera ensuite pour les fonctions elliptiques.

Les formules principales de la Théorie des fonctions rationnelles d'une variable x se réduisent à deux formules types : une première formule mettant en évidence les valeurs de x, qui rendent la fonction rationnelle $f(x)$ nulle ou infinie

$$f(x) = A\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_p)};$$

puis une deuxième formule, dite de *décomposition en éléments simples*, mettant en évidence les points où la fonction devient infinie, et la façon dont elle y devient infinie

$$\begin{aligned} f(x) = {} & C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m \\ & + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}; \end{aligned}$$

l'élément simple $\frac{1}{x-a}$ est la dérivée de $\operatorname{Log}(x-a)$.

Les formules principales de la Théorie des fonctions trigonométriques peuvent, de même, se ramener à deux types analogues : une première formule mettant en évidence les points où la fonction devient nulle ou infinie

$$f(x) = A e^{mxi}\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_p)},$$

et une deuxième formule, appelée *formule de décomposition en éléments simples*, mettant en évidence la façon dont la

fonction devient infinie

$$\begin{aligned} f(x) = C_0 + C_1 e^{2xi} + C_2 e^{4xi} + \ldots + C_m e^{2mxi} \\ + C'_1 e^{-2xi} \qquad + \ldots + C'_n e^{-2nxi} \\ + A\cot(x-a) + B\cot(x-b) + \ldots + L\cot(x-l). \end{aligned}$$

On peut remarquer encore que l'élément simple

$$\cot(x-a)$$

est la dérivée de

$$\operatorname{Log}\sin(x-a).$$

De même, dans la Théorie des fonctions elliptiques, il existe deux formules fondamentales : 1° une formule de décomposition en facteurs

$$f(x) = a e^{cx} \frac{H(x-a_1)\ldots H(x-a_n)}{H(x-b_1)\ldots H(x-b_n)}$$

mettant en évidence les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ où la fonction s'annule, et les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ où elle devient infinie; 2° une formule de décomposition en éléments simples, due à M. Hermite

$$f(x) = C_0 + AZ(x-a) + \ldots + LZ(x-l),$$

où l'élément simple $Z(x-a)$ est égal à

$$\frac{d\operatorname{Log}H(x-a)}{dx}.$$

La plupart des calculs sur les fonctions elliptiques sont fondés sur l'emploi de l'une ou de l'autre de ces deux formules : ces calculs se ramènent donc à des règles simples dont il est fait de nombreuses applications.

La Théorie des fonctions elliptiques se complique de la question des notations qui varient d'un Traité à l'autre. Tout d'abord, nous nous sommes interdit rigoureusement d'employer aucune notation nouvelle. Nous avons exposé simultanément deux systèmes de notations qui doivent subsister

définitivement : celui de Jacobi, constamment suivi par M. Hermite, dans toutes ses recherches, et celui de M. Weierstrass. Le passage de l'un de ces systèmes à l'autre est aisé : néanmoins, il importe de les conserver tous les deux; car, suivant les cas, les applications sont plus faciles dans l'un des systèmes que dans l'autre. En outre, après avoir lu un Traité élémentaire, le lecteur doit connaître les deux systèmes, afin de pouvoir lire ensuite les Livres ou les Mémoires écrits dans chacun d'eux.

Pour préparer les applications, nous avons étudié avec soin les cas particuliers où les valeurs des fonctions elliptiques sont réelles, les seuls qui puissent se présenter en Mécanique et en Physique.

Chaque Théorie est suivie immédiatement de quelques applications; ainsi l'étude de la fonction p de M. Weierstrass, quand l'une des périodes est réelle et l'autre purement imaginaire, est suivie d'applications à la cubique plane, à la lemniscate, au pendule sphérique, au mouvement d'un corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe; l'étude des fonctions de Jacobi, pour le cas où le module est réel et plus petit que un, est suivie d'applications à la biquadratique gauche, à la surface des ondes, au pendule simple, à l'élastique plane, à la corde à sauter, aux mouvements à la Poinsot; l'étude de la fonction p, dans le cas de deux périodes imaginaires conjuguées, est suivie de l'application au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse. Viennent ensuite quelques applications au problème de Lamé et au problème de l'élastique plane sous pression normale constante, dont les intégrales, découvertes par M. Maurice Levy, ont été converties en formules elliptiques par Halphen.

L'Ouvrage se termine par la Théorie des fonctions que M. Hermite a appelées *fonctions doublement périodiques de*

deuxième ou de troisième espèce, avec applications à l'équation de Lamé et aux équations de M. Picard, et par quelques notions élémentaires sur les fonctions modulaires qui fournissent l'exemple le plus simple des fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré. Comme pour les fonctions elliptiques, nous donnons pour les fonctions doublement périodiques de deuxième espèce deux formes essentielles : décomposition en facteurs et décomposition en éléments simples, d'après M. Hermite; puis nous indiquons, pour les fonctions de troisième espèce, deux formes analogues, en employant l'élément simple introduit par M. Appell.

Les principales formules sont résumées dans un Tableau placé à la fin du Volume. Sauf dans l'exposé de la transformation de Landen, nous n'avons pas donné de Tables numériques, car, dans la plupart des cas, les séries définissant les fonctions à calculer sont si rapidement convergentes, que les premiers termes suffisent dans les applications. On trouvera des exemples de calculs numériques à la fin du *Calcul intégral* de M. J. Bertrand et dans les Tables de Hoüel.

Nous espérons qu'après avoir étudié cet Ouvrage, le lecteur pourra se servir des fonctions elliptiques comme des fonctions trigonométriques. Nous avons choisi des applications aussi variées que possible : on en trouve d'autres, d'une grande élégance, dans le Traité de M. Greenhill. Quant aux développements théoriques, nous pensons avoir mis le lecteur à même de lire les grands Traités de Briot et Bouquet, d'Halphen, de MM. Tannery et Molk, et de se servir utilement des feuilles de M. Schwarz.

Paris, 27 septembre 1896.

PRÉFACE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

La théorie des fonctions méromorphes doublement périodiques, appelées aussi fonctions elliptiques, est l'illustration la plus simple et la plus complète de la théorie moderne des fonctions. En outre, les fonctions elliptiques interviennent dans la solution d'un grand nombre de problèmes de géométrie et de mécanique.

De là, le double intérêt analytique et pratique qui s'attache à ses fonctions.

D'abord, du point de vue analytique, la théorie des fonctions elliptiques généralise la théorie élémentaire des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques qui sont des cas particuliers limites des fonctions doublement périodiques, cas particuliers dans lesquels les deux périodes ou une seule des deux périodes deviennent infinies.

La périodicité du sinus et de la cotangente se manifeste par la décomposition en facteurs ou en éléments simples

$$s(z) = \frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega} = z\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(1-\frac{z}{n\omega}\right)e^{\frac{z}{n\omega}},$$

la valeur $n = 0$ étant exceptée, ω étant la période,

$$\frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega} = \frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{1}{z} + \sum\left(\frac{1}{z-n\omega}+\frac{1}{n\omega}\right); \tag{1}$$

de même celle des fonctions doublement périodiques résulte des formules suivantes qui définissent ces fonctions dans la notation de Weierstrass :

$$\sigma(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{n\omega + n'\omega'}\right) e^{\frac{z}{n\omega + n'\omega'} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(n\omega + n'\omega')^2}},$$

la combinaison

$$n = n' = 0$$

étant exceptée, ω et ω' étant les périodes

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum{}' \left[\frac{1}{z - n\omega - n'\omega'} + \frac{1}{n\omega + n'\omega'} + \frac{z}{(n\omega + n'\omega')^2}\right],$$

$$(2) \qquad p(z) = -\frac{d}{dz}\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum \left[\frac{1}{(z - n\omega + n'\omega')^2} - \frac{1}{(n\omega + n'\omega')^2}\right].$$

Toute la théorie est dominée par cette analogie. Les diverses expressions des fonctions elliptiques résultent de ces vues générales, soit dans la notation de Weierstrass, soit dans celle de Jacobi : viennent ensuite les formules dites d'inversion, généralisant la formule élémentaire

$$(3) \qquad \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = z,$$

qui donne $s = \sin z$ et se rapportant aux cas où le radical, au lieu de porter sur $1 - s^2$, porte sur un polynome du troisième ou du quatrième degré.

Mais, ici, se présente une différence profonde entre le cas des fonctions circulaires et celui des fonctions elliptiques : s'il est facile de prouver que la fonction $s(z)$ définie par (3) est une fonction entière périodique, il est notablement plus compliqué d'établir que la fonction $u = p(z)$ définie par

l'inversion de

$$\int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} = z \qquad (g_2, g_3 \text{ réels ou complexes})$$

est une fonction méromorphe doublement périodique. C'est *le problème de l'inversion;* à diverses reprises, dans le cours de cette nouvelle édition, on a insisté sur l'importance de ce problème; à la fin de l'Ouvrage une Note étendue lui a été consacrée.

Parmi les autres additions de l'édition actuelle signalons d'abord une étude sur les polygones de Poncelet, avec discussion des différents cas topologiques de figures. De plus, on a repris à nouveau la théorie de la surface des ondes; cette surface constitue l'exemple le plus simple des surfaces hyperelliptiques de rang 2, remarque qui est l'origine de la discussion nouvelle.

De même, on a transformé complètement l'ancien Chapitre sur les fonctions modulaires; on s'est proposé d'étudier les fonctions $J(\tau)$ et $k^2(\tau)$ dans leurs domaines fondamentaux respectifs, sans s'appuyer sur les propriétés de l'intégrale de Cauchy (de manière à maintenir le point de vue de la première édition) et sans invoquer le secours des équations différentielles linéaires.

La théorie des fonctions modulaires est apparentée à celles de la transformation et de la multiplication complexe; en elles se rejoignent quelques-uns des plus beaux Chapitres de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de l'Analyse. Ici, il ne pouvait être question d'en esquisser l'étude; le lecteur qui voudrait l'entreprendre trouvera un exposé, d'un relief saisissant, dans le magistral Ouvrage de M. L. Bianchi : *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellitiche.*

Enfin, parmi les nouvelles Notes qui terminent cette seconde

édition, je signalerai la Note III; elle établit d'une manière synthétique et rapide que les développements (1) et (2) satisfont à des équations différentielles telles que

$$\frac{du}{dz} + u^2 + \frac{\pi^2}{\omega^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3.$$

Telle est la nouvelle édition qui, reproduisant la première rédaction que nous avions faite, Lacour et moi, s'est enrichie d'applications et de théories nouvelles. Je tiens, en terminant, à exprimer tous mes remercîments à M. Garnier, l'éminent professeur de l'Université de Poitiers, à qui sont dus presque tous les perfectionnements que présente la publication actuelle.

Paris, 17 juillet 1922.

P. APPELL.

PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I. — Généralités sur les fonctions uniformes.

1. Séries entières. Fonction holomorphe en un point. Zéros. — Soit $u = x + yi$ (x et y nombres réels; $i = \sqrt{-1}$) une variable complexe; suivant l'usage, nous représenterons cette variable par un point appartenant à un plan (u), et admettant x et y comme coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires tracés dans ce plan. Désignons encore par a une valeur fixe quelconque attribuée à u, et considérons la série de puissances

$$(1) \qquad c_0 + c_1(u-a) + \ldots + c_n(u-a)^n + \ldots,$$

où les c_n sont des quantités choisies d'une façon quelconque, mais telle cependant que la série (1) converge pour une valeur u_0 de u différente de a.

Dans ces conditions, on démontre que la série (1) converge sûrement pour tous les points u situés à l'intérieur du cercle C_0, décrit dans le plan (u), de a comme centre, et passant par le point u_0 : la série (1) représente donc en tous les points intérieurs à C_0 une fonction $f(u)$, *susceptible d'une seule valeur, et bien déterminée.*

On démontre encore que cette fonction $f(u)$ est *continue* à l'intérieur de tout cercle concentrique à C_0, et de rayon plus petit; en particulier, lorsque u tend vers a, $f(u)$ tend vers la valeur $c_0 = f(a)$. Enfin, on démontre que la série formée par les dérivées d'ordre p des termes respectifs de (1) est convergente à l'intérieur de C_0 et y représente *la dérivée d'ordre* p de $f(u)$; en particulier, on a donc

$$c_1 = f'(a), \qquad 1.2 c_2 = f''(a), \quad \ldots, \quad 1.2\ldots n c_n = f^{(n)}(a), \quad \ldots,$$

ce qui permet d'écrire la série (1) sous la forme

$$(1') \quad f(u) = f(a) + \frac{u-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(u-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots.$$

En définitive, la série (1) n'est donc pas autre chose que le développement en série de Taylor d'une fonction $f(u)$ dans le domaine du point $u = a$; et toutes les fois qu'une fonction $f(u)$ pourra être développée sous la forme précédente au voisinage d'un point a, on dira que la fonction est *régulière* ou *holomorphe* au point a, et que le point a est un point *régulier* pour la fonction $f(u)$.

Zéros. — Soit $f(u)$ une fonction holomorphe pour $u = a$; si $f(a)$ est nul, on dit que a est un *zéro* de la fonction $f(u)$; et, si $f'(a)$ n'est pas nul, le zéro est *simple*. Si un certain nombre de dérivées $f'(a)$, $f''(a)$, ... sont nulles, $f^{(n)}(a)$ étant la première dérivée non nulle, le zéro $u = a$ est dit *d'ordre* n. Le développement (1′) peut alors s'écrire

$$(2) \qquad f(u) = (u-a)^n g(u),$$

le facteur $g(u)$ désignant une série entière en $u - a$, qui ne s'annule pas pour $u = a$. En vertu de la continuité de la fonction $g(u)$ pour $u = a$, on pourra donc décrire de a comme centre un cercle de rayon non nul à l'intérieur duquel $g(u)$ prendra des valeurs arbitrairement voisines de $g(a)$, et, par suite, non nulles. Il en résulte que, du zéro $u = a$ de $f(u)$ comme centre, on peut décrire un cercle de rayon non nul à l'intérieur duquel $f(u)$ ne possède aucun autre zéro que a lui-même : c'est cette propriété qu'on exprime en disant que les zéros d'une fonction $f(u)$ sont des points *isolés*.

2. Fonction entière. Cercle de convergence d'une série de Taylor. — Imaginons maintenant qu'on fasse varier u hors de C_0; *a priori*, deux cas seulement sont possibles :

a. Ou bien la série (1), ou (1′), est convergente quel que soit u; s'il en est ainsi, la fonction $f(u)$ sera dite *entière;* une fonction entière est donc holomorphe pour tout point u à distance finie. Tel est le cas pour les fonctions classiques e^u, $\sin u$, $\cos u$ $\operatorname{sh} u$, $\operatorname{ch} u$;

b. Ou bien il existe des valeurs de u pour lesquelles (1) n'est plus convergente. Dans ce cas, on démontre qu'il existe un cercle Γ, de centre $u = a$, de rayon au moins égal à celui de C_0, appelé le *cercle de convergence* de la série; il jouit de la propriété suivante : Pour tous les points intérieurs à Γ, la série converge; pour tous les points extérieurs à Γ, la série diverge; pour les points appartenant à la circonférence de Γ, la série peut, suivant les cas, converger ou diverger. Le rayon de Γ est le *rayon de convergence* de la série.

3. Fonction uniforme. — Ceci posé, admettons d'abord qu'il existe un point a_1 de Γ pour lequel la série $f(u)$ converge ainsi que toutes ses dérivées successives; si la série

$$f_1(u) = f(a_1) + \frac{u - a_1}{1} f'(a_1) + \ldots + \frac{(u - a_1)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a_1) + \ldots$$

a un rayon de convergence plus grand que zéro, on montre que dans la région commune aux deux cercles de convergence, $f(u)$ et $f_1(u)$ ont la même somme; $f_1(u)$ constitue ainsi le développement en série de Taylor de la fonction $f(u)$ autour du point régulier $u = a_1$; et il est clair que le nouveau développement $f_1(u)$ permettra de calculer la fonction $f(u)$ pour des points u extérieurs à Γ.

On conçoit donc que dans ce cas il soit possible d'étendre de proche en proche le domaine du plan u où l'on connaissait primitivement la fonction; ce *prolongement* du domaine initial affecte la forme d'une chaîne de cercles Γ, Γ_1, ..., Γ_n, ..., qui peut d'ailleurs se couper elle-même. Il peut donc arriver qu'un même point u' appartienne à deux cercles Γ_j distincts, *non consécutifs;* si la fonction $f(u)$ calculée à partir de $u = a$ jusqu'à $u = u'$

en suivant successivement les deux chaînons aboutissant aux deux cercles Γ_j prend chaque fois la même valeur, on dit que la fonction $f(u)$ est *uniforme*. Toutes les fonctions dont nous aurons à nous occuper ici seront des fonctions uniformes dans tout le plan; nous n'insisterons donc pas sur le cas où la fonction n'est pas uniforme, nous bornant à rappeler que les fonctions élémentaires $\sqrt{u}$, $\operatorname{Log} u$, $\operatorname{arc\,tang} u$ constituent autant d'exemples de fonctions non uniformes.

4. **Points singuliers. Pôles. Résidus. Points singuliers essentiels.** — Revenons au cercle de convergence Γ de la série (1). On démontre encore que sur Γ il existe nécessairement un point au moins, soit u_1, qui n'est pas régulier. Un tel point est dit *singulier*, et l'énoncé qui précède équivaut évidemment à celui-ci :

Le rayon de convergence de la série (1) est égal à la distance du point a au point singulier le plus voisin de a. C'est un point singulier *isolé* quand on peut décrire de ce point comme centre un cercle assez petit pour que la fonction n'ait pas d'autre point singulier dans ce cercle.

Pour ne pas compliquer la notation, nous désignerons maintenant par a un point singulier isolé.

Pôles. — Un point singulier a est un *pôle* quand la fonction devient *infinie en ce point à la façon d'une fraction rationnelle*. Pour préciser, le point a est un pôle, quand la fonction $f(u)$ devient infinie en ce point et qu'il existe une fraction rationnelle

$$\varphi(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$

telle que la différence

$$f(u) - \varphi(u)$$

soit holomorphe au point a (les lettres $A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ désignent des constantes). La fraction rationnelle $\varphi(u)$ s'appelle la *partie principale* de la fonction $f(u)$ relative au pôle a; le coefficient A de $\frac{1}{u-a}$ est le *résidu* relatif à ce pôle : l'entier α est *l'ordre* ou degré du pôle et la fonction $f(u)$ est dite *méromorphe* au point $u = a$. On a alors, dans un certain cercle γ de centre a,

$$f(u) = \varphi(u) + g(u),$$

$g(u)$ étant une fonction holomorphe au point a; et cette relation montre qu'à l'intérieur de γ $f(u)$ est holomorphe pour tout point u distinct de a; en particulier, dans γ, $f(u)$ ne possède aucun autre pôle que $u = a$, ce que nous exprimerons encore en disant que les pôles d'une fonction méromorphe sont des points *isolés*. Revenons à la relation précédente; nous pouvons l'écrire, en réduisant le second membre au même dénominateur $(u - a)^\alpha$,

$$f(u) = \frac{G(u)}{(u-a)^\alpha},$$

$G(u)$ étant une fonction holomorphe au point a, différente de zéro pour $u = a$.

Nous dirons aussi que le point a est un *infini d'ordre* α de la fonction.

Points singuliers essentiels. — Quand un point singulier a d'une fonction uniforme $f(u)$ n'est pas isolé, ou qu'étant isolé il n'est pas un pôle, on dit qu'il est un point *singulier essentiel*. Par exemple, a est un point essentiel si $f(u)$ admet une infinité de zéros dans le voisinage de a : car, si a était un point régulier ou un pôle d'ordre α, $G(u) = (u - a)^\alpha f(u)$ [avec $\alpha = 0$ ou > 0] serait continue pour $u = a$ (n° 1); en vertu de cette continuité, a serait un zéro de $G(u)$ et devrait être isolé (n° 1).

Nous ne nous occupons dans la suite que de fonctions dont les seuls points singuliers à distance finie sont des pôles. Ces fonctions sont dites méromorphes dans tout le plan, ou, plus simplement, *méromorphes*.

5. **Remarque sur les zéros et les pôles.** — Si le point a est un zéro d'ordre n de la fonction $f(u)$, il est un pôle simple de résidu n dans la dérivée logarithmique $\frac{f'(u)}{f(u)}$; en effet, on a alors, dans le voisinage de $u = a$,

$$f(u) = (u-a)^n g(u),$$

puis en prenant les logarithmes et les dérivées,

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{n}{u-a} + \frac{g'(u)}{g(u)};$$

comme $g(u)$ n'est pas nul pour $u = a$, on peut diviser la

série $g'(u)$ par la série $g(u)$, le quotient étant encore une série de puissances positives; ainsi le rapport $\frac{g'(u)}{g(u)}$ est une fonction holomorphe au point a; donc ce point est un pôle simple de résidu n de $\frac{f'(u)}{f(u)}$.

De même, si le point $u = a$ est un pôle d'ordre α de $f(u)$, il est un pôle simple de résidu $-\alpha$ de $\frac{f'(u)}{f(u)}$. En effet, dans cette hypothèse, on a, au voisinage de a,

$$f(u) = \frac{G(u)}{(u-a)^\alpha},$$

d'où

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{-\alpha}{u-a} + \frac{G'(u)}{G(u)};$$

comme $G(u)$ ne s'annule pas pour $u = a$, $\frac{G'(u)}{G(u)}$ est une fonction holomorphe en a et le théorème est démontré.

6. **Point à l'infini.** — Pour étudier une fonction $f(u)$ de u quand u devient très grand, on fait $u = \frac{1}{u'}$ et l'on suppose u' très petit. La fonction $f(u)$ est dite *holomorphe* au point $u = \infty$ quand $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ est holomorphe au point $u' = 0$: on a alors, pour des valeurs très petites de u',

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = a_0 + a_1 u' + a_2 u'^2 + \ldots,$$

et par suite, pour des valeurs très grandes de u,

$$f(u) = a_0 + a_1 \frac{1}{u} + a_2 \left(\frac{1}{u}\right)^2 + \ldots.$$

Lorsque la fonction est ainsi holomorphe au point ∞, le point ∞ est un zéro d'ordre n quand $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont nuls, a_n étant différent de zéro. La fonction s'annule alors à l'infini comme $\left(\frac{1}{u}\right)^n$.

Le point à l'infini est un pôle ou un point singulier essentiel pour $f(u)$ quand le point $u' = 0$ est un pôle ou un point essentiel pour $f\left(\frac{1}{u'}\right)$. Supposons que ce soit un pôle : alors, par définition, on a

pour de petites valeurs de u'

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{A_{\alpha-1}}{u'^{\alpha}} + \ldots + \frac{A_1}{u'^2} + \frac{A}{u'} + a_0 + a_1 u' + a_2 u'^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire, pour de grandes valeurs de u,

$$f(u) = A_{\alpha-1} u^{\alpha} + \ldots + A_1 u^2 + A u + a_0 + a_1 \frac{1}{u} + a_2 \left(\frac{1}{u}\right)^2 + \ldots.$$

La partie

$$\varphi(u) = A_{\alpha-1} u^{\alpha} + \ldots + A_1 u^2 + A u,$$

qui devient infinie au pôle $u = \infty$, est la partie principale relative à ce pôle; α est l'ordre du pôle.

7. Théorème fondamental sur les fonctions entières. — Nous admettrons encore la proposition suivante, due à Liouville, et dont on trouvera une démonstration à la Note I, à la fin de l'Ouvrage :

Toute fonction entière $f(u)$ dont le module reste, quel que soit u, inférieur à un nombre fixe, se réduit nécessairement à une constante.

Cette proposition jouera dans la suite un rôle fondamental.

Dans les deux paragraphes suivants, nous allons traiter comme exemples les fonctions rationnelles et les fonctions trigonométriques.

II. — Fonctions rationnelles.

8. Objet du paragraphe. — Le lecteur connaît assurément les propriétés des fonctions rationnelles : décomposition en fractions simples, utilité de cette décomposition pour l'intégration et même la différentiation, décomposition en un quotient de deux produits de facteurs linéaires.

Nous reprendrons brièvement cette théorie, en suivant une marche analogue à celle que nous emploierons plus loin pour obtenir l'expression générale des fonctions elliptiques, d'abord sous une forme toute semblable à celle d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples, puis sous une forme semblable

à celle d'une fraction rationnelle décomposée en un quotient de deux produits de facteurs linéaires.

9. **Fonction rationnelle particulière.** — La fonction

$$f(u) = \frac{u}{(u-1)(u-2)} \tag{3}$$

est holomorphe à distance finie en tous les points autres que $u = 1$, $u = 2$. Ces deux points sont des pôles du premier ordre. La partie principale relative au pôle $u = 1$ est

$$\varphi_1(u) = -\frac{1}{u-1};$$

en effet, on vérifie immédiatement que la différence $f(u) - \varphi_1(u)$ est holomorphe au point $u = 1$. Le résidu relatif au pôle $u = 1$ est -1. De même la partie principale relative au pôle $u = 2$ est

$$\varphi_2(u) = \frac{2}{u-2},$$

avec le résidu 2. Au point ∞ la fonction est holomorphe, car

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{u'}{(1-u')(1-2u')}$$

est holomorphe au point $u' = 0$. On voit que $u' = 0$, c'est-à-dire $u = \infty$, est un zéro simple. La fonction $f(u)$ a donc deux pôles simples $u = 1$, $u = 2$ et deux zéros simples $u = 0$, $u = \infty$: on dit qu'elle est d'ordre 2. On peut remarquer que l'équation

$$f(u) = C$$

a deux racines quelle que soit la constante C.

Comme les fonctions $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ sont holomorphes partout à distance finie et infinie, excepté aux pôles respectifs 1 et 2, la différence

$$f(u) - \varphi_1(u) - \varphi_2(u)$$

est holomorphe *partout* à distance finie et infinie, y compris les pôles 1 et 2, d'après la définition des parties principales φ_1 et φ_2. Cette différence est donc une *constante* et, comme elle s'annule à l'infini, puisque chacune des fonctions f, φ_1, φ_2 s'y annule, elle

est *égale à zéro*. On a donc

$$f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),$$

formule que donnerait immédiatement la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples.

10. **Cas général. Pôles et zéros. Ordre.** — Une fonction rationnelle

$$f(u) = \frac{a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{P(u)}{Q(u)}, \tag{4}$$

où P et Q sont deux polynomes de degrés m et n, est une fonction qui, à distance finie et infinie, n'a d'autres points singuliers que des pôles. A distance finie, elle a comme pôles les racines de $Q(u) = 0$: le nombre des pôles à distance finie, en comptant chacun d'eux avec son degré de multiplicité, est donc n.

1° Si $m > n$, le point ∞ est un pôle d'ordre $m - n$. Le nombre total des pôles à distance finie et infinie est donc

$$n + (m - n) = m.$$

Il y a aussi m zéros qui sont les racines de $P(u) = 0$. La fraction a donc m pôles et m zéros : on dit qu'elle est d'ordre m. L'équation $f(u) = C$ a m racines quel que soit C.

2° Si $n > m$, le point ∞ est un zéro d'ordre $n - m$. La fraction a alors n pôles et un nombre égal de zéros, car il y en a m à distance finie [les racines de $P(u)$] et $n - m$ réunis à l'infini. La fraction est d'ordre n; l'équation $f(u) = C$ a toujours n racines.

3° Si $m = n$, le point ∞ n'est ni un pôle ni un zéro; il y a encore autant de zéros que d'infinis : la fraction est d'ordre $m = n$.

En résumé, une fonction rationnelle $f(u)$ a toujours dans tout le plan, l'infini compris, autant de *pôles* que de *zéros*; le nombre des pôles ou des zéros est l'*ordre* de la fonction : l'équation $f(u) = C$ a, quel que soit C, un nombre de racines égal à l'ordre.

11. **Formes analytiques principales des fonctions rationnelles.** — On peut mettre une fonction rationnelle sous deux formes différentes suivant que l'on veut mettre en évidence les pôles et les parties principales, ou les pôles et les zéros.

1° *Première forme mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes. Décomposition en fractions simples.* — Appelons $a, b, \ldots, l$ les pôles à distance finie respectivement d'ordre $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et

$$\varphi_1(u) = \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A}{u-a},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta} + \ldots + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \frac{B}{u-b}, \quad \ldots$$

les parties principales correspondantes. Supposons, pour plus de généralité, que le point ∞ soit un pôle, ce qui arrive si $m > n$; et soit

$$\varpi(u) = M_s u^s + \ldots + M_2 u^2 + M_1 u \qquad (s = m - n)$$

la partie principale relative à ce pôle.

Chacune de ces parties principales est holomorphe partout, excepté au pôle correspondant. La différence

$$(5) \qquad f(u) - \varphi_1(u) - \varphi_2(u) - \ldots - \varpi(u)$$

est donc holomorphe *partout à distance finie et infinie*. En effet, au pôle a, la différence $f(u) - \varphi_1(u)$ est holomorphe et les fonctions $\varphi_2, \ldots, \varpi$ le sont. Il en est de même aux pôles $b, \ldots, l$.

A l'infini, la différence $f(u) - \varpi(u)$ est holomorphe et les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le sont aussi. Donc la différence (5), holomorphe partout, est une constante M_0, et l'on a

$$f(u) = M_0 + \varpi(u) + \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \ldots,$$

$$(6) \quad f(u) = M_0 + M_1 u + \ldots + M_s u^s + \sum \left[\frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A}{u-a} \right],$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles à distance finie.

On retrouve ainsi la formule élémentaire de décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples : elle met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, et elle donne immédiatement l'intégrale d'une fonction rationnelle.

On peut écrire

$$f(u) = M_0 + \sum \left[\frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A}{u-a} \right],$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles à distance finie et

infinie, si l'on convient que, pour un pôle a rejeté à l'infini, $\frac{1}{u-a}$ doive être remplacé par u, ou en abrégé que

$$u - a = \frac{1}{u} \quad \text{quand } a = \infty.$$

On remarquera que l'on peut prendre arbitrairement les parties principales relatives à tous les pôles, propriété qui ne subsiste pas pour les fonctions elliptiques.

2° *Deuxième forme mettant en évidence les zéros et les infinis.* — La deuxième forme qu'on peut donner à une fonction rationnelle met en évidence *ses zéros et ses infinis*. Il suffit pour cela de décomposer les polynomes P et Q, qui forment le numérateur et le dénominateur de la fraction, en facteurs du premier degré, et l'on aura

$$(7) \qquad f(u) = \mathrm{C}\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_m)}{(u-\beta_1)(u-\beta_2)\ldots(u-\beta_n)},$$

expression où certains facteurs peuvent être égaux, soit au numérateur, soit au dénominateur.

3° *Passage de la première forme à la seconde.* — Soit $f(u)$ la fonction rationnelle considérée ayant pour zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, et pour pôles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

La fonction $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est aussi une fonction rationnelle ayant pour pôles simples les zéros et les infinis de $f(u)$ (n° 5), les zéros simples avec le résidu $+1$ et les pôles simples avec le résidu -1.

En mettant alors $\frac{f'(u)}{f(u)}$ sous la première forme (décomposition en fractions simples), on a

$$\begin{aligned}\frac{f'(u)}{f(u)} = {} & \frac{1}{u-\alpha_1} + \frac{1}{u-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{u-\alpha_m} \\ & - \frac{1}{u-\beta_1} - \frac{1}{u-\beta_2} - \ldots - \frac{1}{u-\beta_n}.\end{aligned}$$

Intégrant et passant des logarithmes aux nombres, on retrouve l'expression (7).

12. Remarque. — Nous venons de voir qu'une fonction rationnelle n'a d'autres points singuliers que des pôles à distance

finie et infinie. La réciproque est vraie. *Une fonction uniforme n'ayant d'autres singularités à distance finie ou infinie que des pôles est une fonction rationnelle.* Nous nous bornerons à rappeler ce théorème, qui est une conséquence du théorème fondamental du n° 7, et dont nous n'aurons pas à nous servir.

13. **Relation algébrique entre deux fonctions rationnelles. Théorème d'addition algébrique.** — Soient $f(u)$ et $g(u)$ deux fonctions rationnelles; entre les équations

$$x = f(u), \qquad y = g(u),$$

éliminons la variable u; le résultat de cette élimination sera une équation de la forme

$$F(x, y) = 0,$$

où F est un polynome par rapport à x et y. Par définition, toute courbe algébrique, dont l'équation $F(x, y) = 0$ peut s'obtenir par une élimination telle que la précédente, est dite *unicursale* (ou *rationnelle*); ses coordonnées peuvent s'exprimer par des fractions rationnelles d'un paramètre auxiliaire u. Soit n le plus grand des ordres des deux fonctions rationnelles f et g; on démontre que la courbe est de degré n et qu'elle possède $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles (distincts ou infiniment voisins). D'une façon générale, soit d le nombre des points doubles d'une courbe algébrique plane de degré n; la différence

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

qui ne peut être négative, s'appelle le *genre* de la courbe; les courbes unicursales ont donc un genre nul (c'est-à-dire le maximum du nombre de points doubles compatible avec leur degré). Inversement, on démontre que toute courbe de genre zéro est unicursale. (*Cf.* APPELL et GOURSAT, *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris, 1895, p. 284.)

Enfin, entre les équations (où f est rationnelle)

$$x = f(u), \qquad y = f(v), \qquad z = f(u + v),$$

éliminons u et v; le résultat sera une équation de la forme

$$P(x, y, z) = 0,$$

où P est un polynome par rapport à x, y, z; c'est dire que quels que soient u et v on aura identiquement

$$P[f(u), f(v), f(u+v)] = 0.$$

En d'autres termes, $f(u+v)$ est une *fonction algébrique* de $f(u)$ et $f(v)$, ce qu'on exprime en disant que *toute fonction rationnelle $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique.*

III. — Fonctions trigonométriques.

14. Objet du paragraphe. — Nous allons présenter les points fondamentaux de la théorie des fonctions trigonométriques, en suivant une voie identique à celle que nous adopterons dans le Chapitre suivant pour les fonctions elliptiques.

15. Fonction $\sin u$; sa définition par un produit infini. Fonctions $\cot u$ et $\frac{1}{\sin^2 u}$; leurs expressions par des séries. Périodicité de ces fonctions. — La fonction $\sin u$ est une fonction entière; en d'autres termes (n° 2), c'est une fonction holomorphe en tous les points à distance finie. Elle s'annule aux points

$$u = 0, \qquad \pm\pi, \qquad \pm 2\pi, \qquad \ldots.$$

C'est ce que met en évidence la formule suivante que nous supposons connue et que nous considérons *comme servant de définition à* $\sin u$:

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}}, \tag{8}$$

le produit Π' étant étendu à toutes les valeurs de l'entier m de $-\infty$ à $+\infty$, la valeur $m = 0$ exceptée. [On trouvera dans la Note III, à la fin de l'Ouvrage, la démonstration de l'identité de la fonction représentée par (8) avec la fonction $\sin u$ définie en trigonométrie.] Grâce à la présence du facteur $e^{\frac{u}{m\pi}}$, le produit Π' est absolument convergent. Cette fonction $\sin u$ est impaire, comme on le voit sur le produit (8). En effet, comme m prend toutes

les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on peut le changer de signe et écrire

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 + \frac{u}{m\pi}\right) e^{-\frac{u}{m\pi}}.$$

Changeant ensuite u en $-u$, on voit, en comparant à (8), que $\sin(-u)$ est égal à $-\sin u$.

Le point ∞ est un point singulier essentiel de $\sin u$: en effet, si l'on fait $u = \frac{1}{u'}$, on voit que, dans une aire aussi petite qu'on le veut entourant le point $u' = 0$, la fonction $\sin \frac{1}{u'}$ admet une infinité de zéros $u' = \frac{1}{m\pi}$. D'après ce que nous avons vu (n° 4), le point $u' = 0$ est donc un point singulier essentiel.

Fonction $\cot u$. — La fonction $\cot u$ se déduit de $\sin u$, par la formule

$$\cot u = \frac{d}{du} \operatorname{Log} \sin u.$$

D'après la formule (8), on a donc pour $\cot u$ la série

$$\begin{aligned} \cot u = \frac{1}{u} &+ \left(\frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{u-2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{u+\pi} - \frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{u+2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right) + \ldots \end{aligned}$$

ou, sous forme condensée,

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right), \tag{9}$$

la somme Σ' étant étendue à toutes les valeurs de l'entier m de $-\infty$ à $+\infty$, la valeur zéro exceptée. La fonction $\cot u$ est aussi impaire. Le développement (9) montre qu'elle a pour pôles simples tous les points $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, le résidu relatif à chacun de ces pôles étant 1. Par exemple, le point $u = \pi$ est un pôle, et la différence

$$\cot u - \frac{1}{u-\pi}$$

est holomorphe au point $u = \pi$. La formule (9) met donc en évidence les pôles et les parties principales correspondantes de la fonction. Le point $u = \infty$ est un point singulier essentiel pour $\cot u$ comme pour $\sin u$.

Fonction $\frac{1}{\sin^2 u}$. — La fonction

$$\frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{d}{du}\cot u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u-m\pi)^2}$$

est paire. Elle a pour pôles doubles tous les points $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; la partie principale relative au pôle $u = m\pi$ est $\frac{1}{(u-m\pi)^2}$.

Périodicité. — Des formules précédentes on peut déduire facilement la périodicité des fonctions circulaires. Tout d'abord le développement de $\frac{1}{\sin^2 u}$ montre immédiatement que cette fonction ne change pas quand on ajoute π à u, car cela ne fait que déplacer les termes du second membre.

On déduit de là :

$$\sin(u+\pi) = \varepsilon \sin u \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pour déterminer ε, faisons $u = -\frac{\pi}{2}$; nous aurons

$$\sin\frac{\pi}{2} = \varepsilon \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

et comme la fonction $\sin u$ est *impaire*, on aura

$$\varepsilon = -1;$$

d'où la formule

$$(10) \qquad \sin(u+\pi) = -\sin u,$$

et par suite

$$\sin(u+2\pi) = \sin u.$$

La fonction $\sin u$ admet donc la période de 2π.

Enfin, par différentiation de (10), on obtient

$$\cot(u+\pi) = \cot u,$$

ce qui montre que la fonction $\cot u$ admet la période π.

Développements en séries de puissances. — Pour calculer les premiers termes du développement de $\cot u$ en série de puissances dans le voisinage de $u = 0$, on peut employer la méthode suivante,

analogue à celle qui nous servira pour les fonctions de Weierstrass. On a, pour u inférieur à $m\pi$ (en valeur absolue),

$$\frac{1}{u - m\pi} = -\frac{1}{m\pi} - \frac{u}{m^2\pi^2} - \frac{u^2}{m^3\pi^3} - \ldots;$$

portant cette série dans le développement de $\cot u$ et ordonnant par rapport aux puissances de u, on a une série de la forme

$$\cot u = \frac{1}{u} - s_1 \frac{u}{\pi^2} - s_2 \frac{u^3}{\pi^4} - s_3 \frac{u^5}{\pi^6} - \ldots,$$

où l'on a posé

$$s_1 = \sum{}' \frac{1}{m^2}, \qquad s_2 = \sum{}' \frac{1}{m^4}, \qquad s_3 = \sum{}' \frac{1}{m^6};$$

les sommes $\sum' \frac{1}{m}$, $\sum' \frac{1}{m^3}$, $\sum' \frac{1}{m^5}$, ... sont évidemment nulles, car m prend des valeurs deux à deux égales et de signes contraires. D'ailleurs, il est facile d'établir la légitimité de la transformation précédente.

Or, on peut obtenir le développement de $\sin u$ en série entière en intégrant le dernier développement de $\cot u$, ce qui donne

$$\operatorname{Log} \sin u = \operatorname{Log} A + \operatorname{Log} u - \frac{s_1}{2}\frac{u^2}{\pi^2} - \frac{s_2}{4}\frac{u^4}{\pi^4} - \frac{s_2}{6}\frac{u^6}{\pi^6} - \ldots,$$

$$\sin u = A u e^{-\frac{s_1}{2}\frac{u^2}{\pi^2} - \frac{s_2}{4}\frac{u^4}{\pi^4} - \frac{s_3}{6}\frac{u^6}{\pi^6} - \ldots},$$

A désignant une constante d'intégration. Comme $\frac{\sin u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers zéro, on a $A = 1$. Développant alors l'exponentielle en série, on obtient une série entière donnant $\sin u$. En identifiant le développement ainsi obtenu avec la série connue

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

on obtient les valeurs des sommes s_1, s_2, s_3, ... On trouve ainsi

$$s_1 = \frac{\pi^2}{3}, \qquad s_3 = \frac{\pi^4}{3^2.5}, \qquad s_3 = \frac{2\pi^6}{3^3.5.7}.$$

Ces sommes sont bien connues : on les trouvera par exemple dans le *Traité de Calcul différentiel* de J. Bertrand (p. 421) :

pour vérifier ainsi les valeurs ci-dessus, il faut se rappeler que

$$s_\nu = \sum{}' \frac{1}{m^{2\nu}} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2\nu}},$$

car, dans Σ', m varie de $-\infty$ à $+\infty$, zéro exclu.

16. Fonctions trigonométriques en général. — D'une manière générale, on peut appeler *fonction trigonométrique* une fonction $f(u)$ rationnelle en $\cot u$, car le sinus et le cosinus d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la cotangente de l'arc moitié que l'on peut toujours désigner par u. Une fonction trigonométrique, ainsi définie, est uniforme; elle est méromorphe (n° 4); elle ne change pas quand on ajoute à u un multiple quelconque positif ou négatif de π : c'est ce que l'on exprime en disant que la fonction admet la *période primitive* π, ses autres périodes $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... étant des multiples de la période primitive.

On peut mettre une fonction trigonométrique sous deux formes remarquables. L'une est analogue à la formule de décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples; cette décomposition a pour éléments la fonction $\cot(u-\alpha)$ et ses dérivées; c'est ce que l'on pourra voir dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1873) de Ch. Hermite, p. 320 (*Œuvres*, t. III, p. 55), ou dans le *Cours d'Analyse* de M. E. Goursat, 3e édition, t. II, p. 38. L'autre forme est analogue à celle qui donne une fonction rationnelle sous forme du quotient de deux produits de facteurs linéaires; l'élément qui remplace les facteurs linéaires est $\sin(u-\alpha)$. Nous ne nous arrêterons pas à établir ces formules qui nous sont inutiles pour la suite.

Si l'on observe que toute fonction trigonométrique de période π est une fonction rationnelle de $\cot u$, et si l'on se reporte au n° 13, on obtiendra aussitôt les deux résultats suivants que nous nous contentons d'énoncer :

Relations algébriques. — Entre deux fonctions trigonométriques

$$x = f(u), \qquad y = f_1(u),$$

de même période π, a lieu une relation algébrique définissant encore une courbe unicursale.

Théorème d'addition algébrique. — Une fonction trigonométrique $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique : $f(u+v)$ est une fonction algébrique de $f(u)$ et $f(v)$.

Remarque sur la période des fonctions trigonométriques. — Les fonctions que nous venons de considérer admettent la période π :

$$f(u+\pi) = f(u).$$

Il est évident que, par un changement linéaire de variable, on peut faire en sorte qu'elles admettent une période quelconque 2ω. Il suffit de poser

$$u = \frac{\pi u'}{2\omega}, \quad f_1(u') = f(u) = f\left(\frac{\pi u'}{2\omega}\right);$$

on a alors

$$f_1(u'+2\omega) = f_1(u').$$

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Théorèmes généraux.

17. **Définition.** — Nous avons observé (n° 12) qu'une fonction rationnelle est caractérisée par la propriété d'être une fonction uniforme n'ayant d'autres singularités que des pôles.

Nous avons remarqué également (n° 16) qu'une fonction trigonométrique (fonction rationnelle de $\cot u$ ou de $\sin 2u$ et $\cos 2u$) est une fonction méromorphe et admettant des périodes qui peuvent toutes être composées par addition et soustraction avec *une seule période primitive* π. Mais ces propriétés ne caractérisent pas les fonctions trigonométriques : elles appartiennent par exemple à $e^{\sin 2u}$ qui n'est pas une de ces fonctions. Pour achever de caractériser une fonction trigonométrique, il faudrait ajouter cette condition qu'elle possède un théorème d'addition algébrique.

Nous définirons d'une façon analogue les fonctions elliptiques par les propriétés suivantes, qui les caractérisent complètement :

On appelle « fonction elliptique » une fonction méromorphe admettant des périodes qui peuvent toutes être composées par addition et soustraction avec deux *périodes primitives* 2ω *et* $2\omega'$, *dont le rapport* $\omega' : \omega$ *est imaginaire.*

La fonction admet donc les deux périodes 2ω et $2\omega'$; on dit qu'elle est *doublement périodique*, tandis que les fonctions trigonométriques sont *simplement* périodiques. Elle vérifie les relations

$$f(u+2\omega)=f(u), \qquad f(u+2\omega')=f(u), \tag{11}$$

d'où l'on conclut

$$f(u+2m\omega+2n\omega')=f(u), \tag{12}$$

m et n désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Nous avons supposé que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est *imaginaire;* s'il était réel, la fonction se réduirait à une fonction simplement périodique ou à une constante. C'est là un fait dont on trouvera la démonstration dans la Note IV et que nous admettrons pour ne pas interrompre l'exposition.

Les fonctions elliptiques sont ainsi définies *in abstracto*, par une propriété *descriptive*. Nous allons maintenant *construire*, par des séries, les éléments analytiques à l'aide desquels on peut exprimer sous forme finie toutes les fonctions elliptiques. Nous indiquerons en même temps leurs principales propriétés, parmi lesquelles nous signalerons dès à présent l'existence d'*un théorème d'addition algébrique* et l'existence d'*une relation algébrique entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes.*

Une première propriété, résultant immédiatement de la définition même, est celle-ci : *La dérivée d'une fonction elliptique est encore une fonction elliptique.* En effet, les relations (11) ayant lieu quel que soit u donnent par différentiation

$$f'(u+2\omega) = f'(u),$$
$$f'(u+2\omega') = f'(u).$$

La dérivée $f'(u)$ admet donc les périodes 2ω et $2\omega'$; elle est uniforme comme $f(u)$ et ses seuls points singuliers à distance finie sont des pôles, car si $f(u)$ est holomorphe en un point, il en est de même de $f'(u)$, et si $f(u)$ a un pôle en un point, il en est de même de $f'(u)$.

18. Parallélogrammes des périodes. — La double périodicité peut se représenter géométriquement comme il suit. Soit u_0 une quantité quelconque (réelle ou imaginaire); considérons dans le plan complexe les points représentant les quantités

$$u_0, \quad u_0+2\omega, \quad u_0+2\omega+2\omega', \quad u_0+2\omega';$$

puisque $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire, ces quatre points ne peuvent appartenir à une même droite; ils constituent donc les sommets d'un véritable parallélogramme P.

Plus généralement, les points

$$u'_0, \quad u'_0+2\omega, \quad u'_0+2\omega+2\omega', \quad u'_0+2\omega',$$

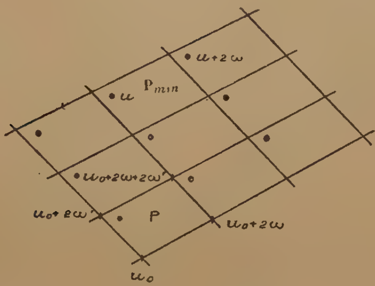
où l'on a posé

$$u'_0 = u_0 + 2m\omega + 2n\omega' \quad (m \text{ et } n \text{ entiers}),$$

sont les sommets d'un parallélogramme $P_{m,n}$ qui se déduit de $P = P_{00}$ par une certaine translation; et quand on aura fait varier chacun des entiers m et n de $-\infty$ à $+\infty$, les parallélogrammes obtenus $P_{m,n}$ constitueront un *réseau de parallélogrammes*, équipollents entre eux et recouvrant tout le plan.

Si u est un point quelconque du plan, il appartiendra donc à l'un de ces parallélogrammes, $P_{m',n'}$ par exemple (sur la figure 1, on a pris $m' = 1$, $n' = 2$). Les points $u + 2\mu\omega + 2\nu\omega'$, où μ et ν sont des entiers quelconques, sont dits *homologues*, ou *congruents*, ou *équivalents* à u; ils occupent dans les parallélogrammes $P_{m'+\mu,n'+\nu}$ la même situation que u dans $P_{m',n'}$ (nous en avons figuré quelques-uns).

Fig. 1.



Parmi ces homologues, il en est donc un, et un seul en général, qui appartient à P : c'est le point $u - 2m'\omega - 2n'\omega'$. Exceptionnellement, si u appartient à la frontière commune de deux parallélogrammes, il y aura, sur deux côtés opposés de P, deux points équivalents à u. Pour conserver la généralité de l'énoncé précédent, nous regarderons les côtés $\overline{u_0, u_0 + 2\omega}$, $\overline{u_0, u_0 + 2\omega'}$ comme appartenant à P (à l'exclusion toutefois des extrémités $u_0 + 2\omega$, $u_0 + 2\omega'$); quant aux deux autres côtés de P, nous les regarderons comme appartenant aux parallélogrammes limitrophes de P.

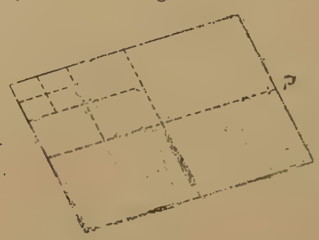
Moyennant cette convention, nous pourrons donc dire qu'un

point quelconque du plan est homologue à un point et à un seul du parallélogramme P. Nous appellerons les parallélogrammes $P_{m,n}$ *parallélogrammes des périodes*, ou *parallélogrammes élémentaires;* le choix de P parmi ces parallélogrammes est évidemment arbitraire.

Ceci posé, nous pouvons interpréter la signification géométrique des relations (12) : elles expriment que la fonction $f(u)$ reprend la même valeur en tous les points homologues. Il suffit donc de connaître la fonction $f(u)$ dans un des parallélogrammes pour la connaître dans tout le plan.

19. Théorème fondamental. — *Une fonction elliptique a au moins un pôle dans un parallélogramme élémentaire, sinon elle se réduit à une constante.* En effet, supposons qu'une fonction

Fig. 2.



elliptique $f(u)$ ne présente aucun pôle dans un parallélogramme élémentaire, P, par exemple; elle sera holomorphe dans le parallélogramme et, par suite (n° 18), dans tout le plan : ce sera donc une fonction entière (n° 2).

Montrons alors que $f(u)$ est bornée dans P; il en résultera que la fonction entière $f(u)$ sera bornée dans tout le plan, et, par suite, se réduira à une constante (n° 7).

Or, si $f(u)$ n'est pas bornée dans P, joignons les milieux des côtés de P de façon à diviser P en quatre parallélogrammes égaux (*fig.* 2); dans l'un au moins de ces parallélogrammes, $f(u)$ ne sera pas bornée. Procédons sur ce dernier parallélogramme comme sur P, et ainsi indéfiniment; nous formerons une suite de parallélogrammes emboîtés les uns dans les autres et qui tendront vers un point a de P (ou de sa frontière) au voisinage

duquel $|f(u)|$ prendra des valeurs supérieures à tout nombre positif donné : ce qui est absurde, puisque, au voisinage de u, $f(u)$ diffère très peu de $f(a)$.

On trouvera plus loin (Chap. XII, n° 231) une démonstration directe du théorème actuel, complètement indépendante du théorème de Liouville.

20. Une fonction elliptique a un nombre limité de pôles dans un parallélogramme élémentaire. — Ainsi, une fonction elliptique a au moins un pôle dans un parallélogramme; nous voulons montrer qu'elle en a un nombre limité. En effet, supposons que, dans P, une fonction $f(u)$ ait une infinité de pôles; procédons comme tout à l'heure, et divisons le parallélogramme P en quatre parallélogrammes égaux; dans un de ces quatre parallélogrammes au moins, il y a une infinité de pôles. Divisons-le encore en quatre parallélogrammes égaux; dans un des nouveaux parallélogrammes au moins, il y a une infinité de pôles. En continuant ainsi, on obtient une suite de parallélogrammes tendant vers un point a du plan et contenant tous une infinité de pôles. En ce point a la fonction n'est évidemment pas holomorphe : le point a est donc un point singulier; mais il ne peut pas être un pôle, car un pôle est nécessairement isolé et nous venons de voir que, dans une aire aussi petite qu'on le veut autour de a, il existe une infinité de pôles. Ce point est donc un *point singulier essentiel* de la fonction, ce qui est impossible, puisqu'une fonction elliptique, par *définition*, *n'a d'autres points singuliers que des pôles dans un parallélogramme*.

Ainsi, une fonction elliptique a un nombre limité de pôles dans un parallélogramme élémentaire, tout comme une fonction rationnelle en a un nombre limité dans tout le plan.

Nous allons donner une première expression analytique des fonctions elliptiques mettant en évidence ces pôles et leurs parties principales; cette expression jouera le même rôle que la formule de décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Voici comment on forme la fonction qui joue dans la théorie des fonctions elliptiques le même rôle que la fraction simple $\dfrac{1}{u-a}$ dans la théorie des fonctions rationnelles.

21. Fonctions σ, ζ, p, Z, H. — Nous avons rappelé précédemment le développement en produit de $\sin u$

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

mettant en évidence les zéros : $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ de cette fonction.

Par analogie, nous allons former avec Weierstrass une fonction holomorphe, comme le sinus, en tous les points à distance finie et admettant comme zéros le point $u = 0$ et tous les points

$$2m\omega + 2n\omega' \quad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n = 0, \pm 2, \pm 2, \ldots \end{pmatrix},$$

homologues de l'origine dans le réseau des parallélogrammes. Posons, pour abréger,

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

et considérons la fonction définie par la formule

$$(13) \qquad \sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \quad \left\{ \begin{array}{c} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \\ w = 2m\omega + 2n\omega' \\ w = 0 \text{ exclu} \end{array} \right\},$$

dans laquelle il faut, pour former le produit infini, attribuer à la quantité w toutes les valeurs contenues dans l'expression $2m\omega + 2n\omega'$, à l'exception de la seule valeur 0 qui correspond à $m = n = 0$.

Dorénavant, quand cette exception devra être observée dans un produit infini ou dans une somme infinie, nous le rappellerons en faisant suivre d'un accent la caractéristique Π ou Σ du produit ou de la somme.

Bien entendu, pour que la définition de σu ait un sens, il faut que le produit infini (13) soit absolument convergent; pour l'instant, nous admettrons cette propriété dont on trouvera une démonstration dans la Note IV.

La fonction σu ainsi définie s'annule seulement aux points $u = 0$ et $u = w = 2m\omega + 2n\omega'$; elle ne devient jamais infinie pour des valeurs finies de u : c'est une fonction *entière* de u (n° 2). On

voit que cette fonction a un zéro simple et un seul dans chaque parallélogramme élémentaire. Tous ces zéros sont des points homologues du réseau de parallélogrammes.

La fonction σ est impaire comme un sinus

$$\sigma(-u) = -\sigma u;$$

en effet, comme m et n prennent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on peut, dans l'expression du produit, changer de signes m et n sans changer ce produit; on a donc aussi

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}.$$

Mais alors, en changeant u en $-u$ et comparant au produit (13), on voit que $\sigma(-u) = -\sigma u$.

Enfin, il résulte de (13) que le rapport $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers zéro.

De même que l'on déduit la fonction $\cot u$ de $\sin u$, en prenant la dérivée logarithmique, de même nous considérerons la fonction obtenue en prenant la dérivée logarithmique de σu :

$$(14) \qquad \zeta u = \frac{d \operatorname{Log} \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}' \left[\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right].$$

Nous désignerons pour abréger cette nouvelle fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ par ζu. La série qui définit ζu est analogue à celle qui définit $\cot u$. Elle montre que la fonction ζu a pour pôles simples tous les points $u = 0$, $u = 2m\omega + 2n\omega'$, avec le résidu $+1$. En effet, la différence

$$\zeta u - \frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'},$$

où m et n sont des entiers déterminés, est holomorphe au point $u = 2m\omega + 2n\omega'$. La fonction ζ a donc un pôle simple de résidu $+1$ dans chaque parallélogramme élémentaire. Il en est de même de la fonction $\zeta(u - a)$, où a est une constante; cette fonction a comme seuls points singuliers les points $u = a$ et $u = a + 2m\omega + 2n\omega'$, qui sont des pôles du premier ordre de résidu $+1$; il y a un de ces pôles et un seul dans chaque parallé-

logramme. Ainsi $u = a$ est un pôle et la différence $\zeta(u-a) - \frac{1}{u-a}$ est holomorphe au point $u = a$.

La fonction ζu est impaire comme la cotangente; on peut le vérifier directement ou le conclure de ce que σu étant impaire, sa dérivée $\sigma' u$ est paire et le quotient $\frac{\sigma'}{\sigma}$ *impair*.

Pour étudier les propriétés de cette fonction, prenons-en la dérivée et appelons $p u$ cette dérivée changée de signe :

$$(15) \qquad p u = -\frac{d^2 \operatorname{Log} \sigma u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right];$$

cette fonction étant la dérivée d'une fonction impaire est *paire* : elle a pour pôles doubles les points $u = 0$, $u = 2m\omega + 2n\omega'$; la partie principale relative à l'un de ces pôles est $\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2}$, le résidu correspondant est *nul*. Cette fonction $p u$ est donc analogue à la fonction $\frac{1}{\sin^2 u}$ donnée par

$$\frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{d^2 \operatorname{Log} \sin u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

La fonction $p(u-a)$, où a est constant, a pour pôles doubles les points a et $a + 2m\omega + 2n\omega'$; la partie principale relative à un de ces pôles est $\frac{1}{(u - a - 2m\omega - 2n\omega')^2}$; il y a un de ces pôles et un seul dans chaque parallélogramme élémentaire.

Périodicité de $p u$. — La fonction $p u$ admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$.

En effet, si l'on forme la différence $p(u+2\omega) - p u$, on a

$$\begin{aligned} p(u+2\omega) - p u &= \frac{1}{(u+2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u+2\omega-w)^2} - \frac{1}{(u-w)^2} \right] \\ &= \sum \left\{ \frac{1}{[u - 2(m-1)\omega - 2n\omega']^2} - \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} \right\}, \end{aligned}$$

où la dernière somme est étendue à toutes les valeurs de m et n sans exception. Cette dernière somme est évidemment nulle, car, en considérant les termes qui correspondent à une même valeur de n, on voit qu'ils se détruisent deux à deux. On a donc

$$(16) \qquad p(u+2\omega) = p u;$$

de même, on trouverait

$$(16') \qquad p(u+2\omega') = pu,$$

Effet de l'addition des périodes à l'argument de ζu. — Intégrons ces deux dernières relations en nous rappelant que l'intégrale de pu est $-\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ou $-\zeta u$; nous aurons

$$(17) \qquad \begin{cases} \zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta, \\ \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta', \end{cases}$$

où η et η' désignent deux constantes introduites par l'intégration. En faisant dans ces relations $u = -\omega$, puis $u = -\omega'$, on a

$$\zeta\omega = \zeta(-\omega) + 2\eta, \qquad \zeta\omega' = \zeta(-\omega') + 2\eta',$$

d'où il résulte, puisque ζ est impaire,

$$(18) \qquad \eta = \zeta\omega, \qquad \eta' = \zeta\omega';$$

ces constantes η et η' sont ainsi exprimées par des séries convergentes.

Notation de Jacobi et d'Hermite. — Dans la notation de Weierstrass, c'est cette fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ou ζ qui joue le même rôle que $\frac{1}{u}$ dans la théorie des fractions rationnelles. Dans la notation de Jacobi, légèrement modifiée par Hermite (*Crelle*, t. 82, 1877, p. 343; *Œuvres*, t. III, p. 420), ce rôle est joué par la fonction *impaire*

$$(19) \qquad Z(u) = \zeta u - \frac{\eta}{\omega} u$$

(*zêta u*), qui ne diffère de ζ que par un terme linéaire en u choisi de telle façon que $Z(u)$ admette la période 2ω. On a, en effet,

$$Z(u+2\omega) - Z(u) = \zeta(u+2\omega) - \zeta u - 2\eta = 0,$$
$$Z(u+2\omega) = Z(u);$$

puis

$$Z(u+2\omega') - Z(u) = \zeta(u+2\omega') - \zeta u - \frac{2\eta\omega'}{\omega},$$

$$Z(u+2\omega') = Z(u) - \frac{2}{\omega}(\eta\omega' - \omega\eta').$$

Dans la notation de Weierstrass, les deux périodes jouent

donc un rôle symétrique, tandis que dans celle de Jacobi une des périodes joue un rôle spécial.

Nous verrons plus loin que la constante $\eta\omega' - \omega\eta'$ n'est pas nulle; elle a pour valeur $\pm \frac{\pi i}{2}$, le signe étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Pour le moment nous poserons

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \delta \tag{20}$$

Alors $Z(u)$ vérifiera les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} Z(u+2\omega) &= Z(u), \\ Z(u+2\omega') &= Z(u) - \frac{2\delta}{\omega}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

La fonction $Z(u)$, ne différant de ζu que par un terme linéaire en u, a les mêmes points singuliers et les mêmes parties principales.

Ainsi, cette fonction $Z(u)$ a pour pôles simples de résidus $+1$ tous les points $u = 0$, $u = 2m\omega + 2n\omega'$; il y a un de ces pôles dans chaque parallélogramme; ils sont tous homologues de l'origine $u = 0$ dans le réseau des parallélogrammes.

La fonction $Z(u-a)$ a pour pôles simples de résidu $+1$ les points $u = a$ et $u = a + 2m\omega + 2n\omega'$, homologues du point a dans le réseau des parallélogrammes. Par exemple, dans le voisinage de $u = a$, $Z(u-a) - \frac{1}{u-a}$ est une fonction holomorphe.

Effet de l'addition des périodes à l'argument de σu et de $H(u)$. — Si l'on intègre de nouveau les formules (17) où $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}\sigma(u+2\omega) &= \operatorname{Log}\sigma u + 2\eta u + \operatorname{Log} c, \\ \operatorname{Log}\sigma(u+2\omega') &= \operatorname{Log}\sigma u + 2\eta' u + \operatorname{Log} c', \end{aligned}$$

$\operatorname{Log} c$ et $\operatorname{Log} c'$ désignant des constantes d'intégration. En passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$\begin{aligned} \sigma(u+2\omega) &= c\, e^{2\eta u}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') &= c' e^{2\eta' u}\sigma u. \end{aligned}$$

Dans la première de ces formules faisons $u = -\omega$ et rappelons-

nous que, σu étant impaire, on a $\sigma(-\omega) = -\sigma\omega$. Nous trouverons, en observant que $\sigma\omega \neq 0$,

$$c e^{-2\eta\omega} = -1, \qquad c = -e^{2\eta\omega}.$$

La seconde relation donne de même

$$c' = -e^{2\eta'\omega'}.$$

La fonction σ vérifie donc les deux relations

$$(22) \qquad \begin{cases} \sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u. \end{cases}$$

On conclut de là, par l'application répétée de ces formules, la valeur de $\sigma(u+2m\omega+2n\omega')$ en fonction de σu, m et n désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Cherchons d'abord l'expression de $\sigma(u+2\omega+2\omega')$. Changeant, dans la seconde des formules ci-dessus, u en $u+2\omega$ et tenant compte de la première, on a

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')-2(\eta\omega'-\omega\eta')}\sigma u.$$

Mais, comme $\eta\omega' - \omega\eta' = \pm\dfrac{\pi i}{2}$, on a

$$(23) \qquad \sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\sigma u.$$

On vérifiera de même que, m et n étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs, on a

$$(24) \qquad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\, e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u.$$

Dans la notation de Jacobi on remplace la fonction σ, dont la dérivée logarithmique est ζu, par une fonction $\mathrm{H}(u)$ (*hêta u*), également impaire, ayant pour dérivée logarithmique la fonction $\mathrm{Z}(u)$ dont il a été question plus haut, soit

$$\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} = \mathrm{Z}(u) = \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\eta}{\omega}u.$$

On a donc, en intégrant,

$$\operatorname{Log}\mathrm{H}(u) = \operatorname{Log}\sigma u - \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \operatorname{Log}\rho,$$

$\operatorname{Log}\rho$ désignant une constante d'intégration, et, par suite,

$$(25) \qquad \mathrm{H}(u) = \rho\, e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sigma u.$$

Pour déterminer ρ, divisons les deux membres de la relation (25) par u et faisons tendre u vers zéro; $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1, $\frac{\mathrm{H}(u)}{u}$ vers la valeur $\mathrm{H}'(0)$ de la dérivée $\frac{d\mathrm{H}}{du}$ pour $u=0$. On a ainsi $\rho = \mathrm{H}'(0)$, et la formule (25) devient

$$\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)} = e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sigma u.$$

La fonction $\mathrm{H}(u)$ admet les mêmes zéros que σu. Elle vérifie les deux relations

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}(u+2\omega) = -\mathrm{H}(u), \\ \mathrm{H}(u+2\omega') = -e^{-\frac{2\delta}{\omega}(u+\omega')}\mathrm{H}(u), \end{cases}$$

où δ désigne comme plus haut la quantité $\eta\omega' - \omega\eta'$. Ces relations se tirent, soit des relations que vérifie σ, soit, par l'intégration, de celles que vérifie Z.

En effet, intégrant les relations (21), on a, puisque $\mathrm{Z}(u) = \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}$,

$$\operatorname{Log}\mathrm{H}(u+2\omega) = \operatorname{Log}\mathrm{H}(u) + \operatorname{Log}c,$$
$$\operatorname{Log}\mathrm{H}(u+2\omega') = \operatorname{Log}\mathrm{H}(u) - \frac{2\delta}{\omega}u + \operatorname{Log}c',$$

où c et c' sont des constantes. On en déduit

$$\mathrm{H}(u+2\omega) = c\,\mathrm{H}(u),$$
$$\mathrm{H}(u+2\omega') = c'e^{-\frac{2\delta}{\omega}u}\mathrm{H}(u).$$

Faisant dans la première $u=-\omega$, et observant que H est impaire, on a $c=-1$; de même, faisant dans la seconde $u=-\omega'$, on a $c' = -e^{-\frac{2\delta\omega'}{\omega}}$. On retrouve bien ainsi les formules (26).

22. Remarque. — On a dès à présent des exemples de fonctions elliptiques. Ainsi la fonction pu, qui n'a que des pôles à distance finie et qui admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$, est une *fonction elliptique;* il en est de même de ses dérivées $p'u$, $p''u$, ...

Les fonctions σ, H, ζ, Z *ne sont pas elliptiques*, car elles n'admettent pas les deux périodes 2ω et $2\omega'$.

Nous allons montrer dans un instant comment, avec les seuls

éléments analytiques nouveaux que nous venons de définir et qui se déduisent tous de σu, on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques.

23. **Cas de dégénérescence.** — Auparavant, nous établirons que lorsqu'une des périodes 2ω ou $2\omega'$ devient infinie, les fonctions σ, ζ et p se réduisent à des fonctions élémentaires connues. Supposons, par exemple, ω' *infini* et prenons la fonction p. Dans la série qui définit pu, w est infini dans tous les termes où figure ω', c'est-à-dire où n est différent de zéro. Tous ces termes sont donc nuls et pu se réduit à la fonction

$$p(u, \omega' = \infty) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega)^2} - \frac{1}{4m^2\omega^2}\right],$$

la somme Σ' étant étendue aux valeurs positives et négatives de l'entier m, zéro exclu. Comme la série $\sum{}' \frac{1}{m^2}$ est convergente et a pour somme $\frac{\pi^2}{3}$ (n° 15, p. 16), on a

$$p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - 2m\omega)}.$$

Mais alors, en comparant à la formule

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \frac{1}{(z - m\pi)^2}$$

(n° 15), on peut écrire

$$p(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\,\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}. \tag{27}$$

En intégrant et changeant les signes, on en déduit

$$\zeta(u, \omega' = \infty) = \frac{\pi^2}{12\omega^2}u + \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega}, \tag{28}$$

sans ajouter de constante, car ζ est impaire.

Enfin, intégrons de nouveau et passons des logarithmes aux nombres ; il vient

$$\sigma(u, \omega' = \infty) = c\, e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega},$$

où c est une constante d'intégration. Pour la déterminer, divisons par u et faisons tendre u vers zéro, en nous rappelant que $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1. On a alors $\frac{\pi}{2\omega} = 1$ et enfin

$$\sigma(u,\ \omega' = \infty) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega}. \tag{29}$$

On voit ainsi que l'analogie de pu avec les fonctions trigonométriques devient l'identité quand une des périodes est infinie.

Supposons que les périodes soient infinies toutes les deux. Alors dans la série pu tous les termes sont nuls, sauf le premier, et l'on a

$$pu = \frac{1}{u^2};$$

intégrant et changeant les signes, on a

$$\zeta u = \frac{1}{u},$$

puis

$$\sigma u = u.$$

On voit, d'après cela, que la théorie que nous allons développer donnera, comme cas limites, les formules relatives aux fonctions trigonométriques ou aux fonctions rationnelles, suivant que l'on y supposera une période infinie ou les deux périodes infinies.

II. — Première expression des fonctions elliptiques. Décomposition en éléments simples. Conséquences.

24. Cas des pôles simples. — Soit $f(u)$ une fonction elliptique ayant les pôles $a, b, c, \ldots, l$ dans un parallélogramme élémentaire P, ces pôles étant d'abord supposés simples et les résidus correspondants étant A, B, ..., L. Alors, dans le voisinage du point a, on a

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

dans le voisinage de b

$$f(u) = \frac{B}{u-b} + \text{fonction holomorphe},$$

. . . .

Formons la fonction

$$\Phi(u) = f(u) - AZ(u-a) - BZ(u-b) - \ldots - LZ(u-l).$$

Cette fonction est holomorphe dans le parallélogramme des périodes P, car dans le voisinage de $u = a$, par exemple, on a

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

$$Z(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

donc

$$f(u) - AZ(u-a) = \text{fonction holomorphe},$$

et, de plus, toutes les autres expressions $Z(u-b), \ldots, Z(u-l)$ sont holomorphes au point a.

D'ailleurs, $f(u)$ admettant les périodes 2ω et $2\omega'$, on a, d'après les propriétés de $Z(u)$ (éq. 21),

$$(30) \qquad \begin{cases} \Phi(u+2\omega) = \Phi(u), \\ \Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \dfrac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L). \end{cases}$$

D'après ces équations, la fonction $\Phi(u)$ est une fonction entière, car elle est holomorphe dans le parallélogramme P, et dans les autres parallélogrammes, elle prend des valeurs qui ne diffèrent que par une constante de celles qu'elle prend dans P.

Nous allons démontrer que $\Phi(u)$ se réduit nécessairement à une *constante*. En effet, la dérivée $\Phi'(u)$ est holomorphe dans tout le parallélogramme P, car la dérivée d'une fonction holomorphe est une fonction holomorphe; de plus, elle admet évidemment les deux périodes 2ω et $2\omega'$, comme on le voit en différentiant les formules (30).

Cette dérivée $\Phi'(u)$ est donc constante, comme étant une fonction entière avec deux périodes (n° 19), soit

$$\Phi'(u) = C_1;$$

et l'on en tire

$$\Phi(u) = C_1 u + C_0,$$

C_1 et C_0 désignant deux constantes. Mais, comme $\Phi(u+2\omega)$ doit être égal à $\Phi(u)$, C_1 doit être nul et $\Phi(u)$ se réduit à une constante C_0. Ainsi la différence appelée $\Phi(u)$ est constante. On

a donc la formule

$$(31)\qquad f(u) = C_0 + AZ(u-a) + BZ(u-b) + \ldots + LZ(u-l),$$

due à Hermite et appelée *formule de décomposition en éléments simples*. Cette formule est analogue à la formule de décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples.

25. La somme des résidus d'une fonction elliptique en tous les pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle. — En effet, nous venons d'appeler A, B, ..., L les résidus relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes; nous avons trouvé que $\Phi(u)$ est une *constante :* alors, on a évidemment $\Phi(u+2\omega') - \Phi(u) = 0$. On a donc d'après la deuxième formule (30), puisque δ est différent de zéro,

$$(32)\qquad A + B + \ldots + L = 0.$$

Le théorème est donc démontré pour une fonction elliptique ne présentant que des pôles simples.

Ainsi, une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme (31), où les constantes A, B, ..., L ont une somme nulle.

Inversement toute fonction définie par une expression de la forme (31), où les constantes A, B, ..., L ont une somme nulle, est une fonction elliptique : en effet, cette fonction n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles simples et, d'après les propriétés de la fonction Z, on a

$$f(u+2\omega) - f(u) = 0,$$
$$f(u+2\omega') - f(u) = -\frac{2\delta}{\omega}(A + B + \ldots + L) = 0.$$

26. Formule de décomposition en éléments simples dans le cas où certains pôles sont multiples. — Pour plus de simplicité, nous avons supposé d'abord que la fonction elliptique considérée n'avait dans un parallélogramme élémentaire que des pôles simples. Le cas où la fonction posséderait des pôles multiples peut être regardé comme un cas limite du précédent : il suffit de supposer que plusieurs des pôles simples viennent à coïncider.

Mais nous traiterons ce cas directement, par la même méthode que le précédent. Nous obtiendrons ainsi l'expression la plus gé-

nérale des fonctions elliptiques et cela encore avec le seul élément analytique $Z(u)$ et ses dérivées.

Soient $a, b, \ldots, l$ les pôles de la fonction $f(u)$ dans un parallélogramme élémentaire et

$$\varphi_1(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A_2}{(u-a)^3} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$
$$\varphi_2(u) = \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \frac{B_2}{(u-b)^3} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les parties principales correspondantes. La différence

$$\begin{aligned}\Phi(u) = f(u) - \Big[& A Z(u-a) - A_1 Z'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} Z^{(\alpha-1)}(u-a)\Big] \\ - \Big[& B Z(u-b) - B_1 Z'(u-b) + \frac{B_2}{1.2} Z''(u-b) + \ldots \\ & + (-1)^{\beta-1} \frac{B_{\beta-1}}{1.2\ldots(\beta-1)} Z^{(\beta-1)}(u-b)\Big] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

est encore une constante; en effet, dans le voisinage de $u = a$ par exemple, on a

$$Z(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$
$$Z'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \text{fonction holomorphe},$$
$$Z''(u-a) = \frac{1.2}{(u-a)^3} + \text{fonction holomorphe},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z^{(\alpha-1)}(u-a) = (-1)^{\alpha-1} \frac{1.2\ldots(\alpha-1)}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction holomorphe}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & A Z(u-a) - A_1 Z'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} Z^{(\alpha-1)}(u-a) = \varphi_1(u) + \text{fonction holomorphe}.\end{aligned}$$

Comme dans le voisinage de $u = a$, on a aussi, par hypothèse,

$$f(u) = \varphi_1(u) + \text{fonction holomorphe},$$

on voit que $\Phi(u)$ est holomorphe au point a; il en est de même des autres pôles. D'ailleurs on a, d'après les propriétés des fonctions Z,

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \frac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L),$$

car les fonctions $Z'(u)$, $Z''(u)$ sont doublement périodiques. On verra, comme plus haut, que la fonction holomorphe Φ est constante; *la somme des résidus* $A+B+\ldots+L$ *est donc nulle pour une fonction elliptique présentant des pôles de multiplicités quelconques*. L'expression générale d'une fonction elliptique est alors

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} f(u) = C_0 + \sum \Big[& A\,Z(u-a) - A_1 Z'(u-a) \\ & + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} Z^{(\alpha-1)}(u-a) \Big], \end{aligned} \right.$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles situés dans un parallélogramme, et la condition (32)

$$A+B+\ldots+L=0$$

étant toujours vérifiée.

Ainsi, de même que toute fonction rationnelle est une combinaison linéaire à coefficients constants de termes de la forme

$$\frac{1}{u-a}, \quad \frac{1}{(u-a)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(u-a)^\alpha}$$

$\left(\text{avec la convention que } u-\infty \text{ doit être remplacé par } \frac{1}{u}\right)$, toute fonction elliptique est, à une constante additive près, une combinaison linéaire, à coefficients constants de termes de la forme

$$Z(u-a), \quad Z'(u-a), \quad \ldots, \quad Z^{(\alpha-1)}(u-a),$$

avec la condition que la somme des résidus [coefficients des termes analogues à $Z(u-a)$] est *nulle*.

Inversement, toute fonction $f(u)$, définie par une expression de la forme (33), où

$$A+B+\ldots+L=0,$$

est une *fonction elliptique*, car on vérifie immédiatement les relations

$$f(u+2\omega)-f(u)=0,$$
$$f(u+2\omega')-f(u)=-\frac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L)=0.$$

27. **Formule de décomposition en éléments simples avec les notations de Weierstrass.** — La formule (33) que nous venons d'établir peut s'écrire comme il suit. Nous avons posé

$$Z(u)=\zeta u-\frac{\eta}{\omega}u.$$

Donc, en différentiant et se reportant à la définition de pu comme la dérivée changée de signe de $\frac{\sigma'}{\sigma}$,

$$Z'(u)=-pu-\frac{\eta}{\omega},$$
$$Z''(u)=-p'u,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Z^{(\alpha-1)}(u)=-p^{(\alpha-2)}u.$$

Faisant ce changement de notations, on a la formule

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} f(u)=D_0+\sum\Big[&A\zeta(u-a)+A_1 p(u-a)-\frac{A_2}{1.2}p'(u-a)-\ldots\\ &+(-1)^{\alpha}\frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}p^{(\alpha-2)}(u-a)\Big],\end{aligned}\right.$$

où D_0 désigne une nouvelle constante et où la somme Σ est encore étendue à tous les pôles situés dans un même parallélogramme des périodes. Les termes linéaires en u, qui semblent s'introduire quand on remplace $Z(u)$ par $\zeta u-\frac{\eta}{\omega}u$, disparaissent, car leur coefficient est $-\frac{\eta}{\omega}(A+B+\ldots+L)$, c'est-à-dire 0.

28. **Remarques.** — Dans ces formules de décomposition nous avons supposé les pôles a, b, ..., l situés dans un même parallélogramme. Cette restriction est *inutile* en ce sens qu'on peut toujours remplacer chacun des pôles par un point homologue. Ainsi, soit

$$a'=a+2m\omega+2n\omega'$$

un point homologue de a; on a

$$\begin{aligned} Z(u-a) &= Z(u-a'+2m\omega+2n\omega'), \\ &= Z(u-a')-n\frac{2\hat{\delta}}{\omega}. \end{aligned}$$

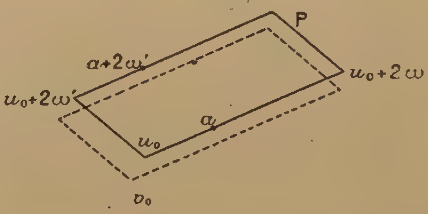
Remplaçant $Z(u-a)$ par cette valeur, on voit que la formule reste la même. La seule valeur de la constante C_0 est modifiée.

Remarquons encore que lorsqu'on choisit un parallélogramme élémentaire P, de sommets

$$u_0, \quad u_0+2\omega, \quad u_0+2\omega+2\omega', \quad u_0+2\omega',$$

il peut arriver qu'une fonction ait des zéros (ou des pôles) tels que a, sur un côté, et, par suite, d'autres zéros (ou d'autres pôles) tels que $a+2\omega'$, sur le côté opposé. D'après la convention

Fig. 3.



du n° 18, un seul de ces zéros (ou de ces pôles) appartient à P (celui, a, qui est sur un côté aboutissant en u_0). Cette convention se justifie d'ailleurs par l'indétermination du choix de u_0 dans la construction de P : en effet, si l'on déplace infiniment peu u_0 en v_0, de façon que u_0 soit intérieur au parallélogramme P' de sommet v_0, le point a appartiendra à P' à l'exclusion de $a+2\omega'$ (*fig.* 3).

29. Règle pratique pour la décomposition d'une fonction elliptique $f(u)$ en éléments simples. — Il faut tout d'abord déterminer les pôles de cette fonction dans un parallélogramme des périodes, arbitrairement choisi d'ailleurs; soient a, b, ..., l ces points.

Il faut ensuite déterminer la partie principale de $f(u)$ relative à chacun de ces pôles. Supposons, par exemple, que le pôle $u=a$ soit d'ordre α : alors le produit

$$\psi(u)=(u-a)^{\alpha}f(u).$$

est holomorphe et différent de zéro pour $u = a$. Si donc on développe ce produit, par la formule de Taylor, dans le voisinage de $u = a$, soit

$$\begin{aligned}\psi(u) = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(u-a) + A_{\alpha-3}(u-a)^2 + \ldots \\ + A(u-a)^{\alpha-1} + (u-a)^\alpha g(u),\end{aligned}$$

$g(u)$ étant une série entière en $(u-a)$, on a, en égalant ce développement à $(u-a)^\alpha f(u)$ et divisant par $(u-a)^\alpha$, le développement

$$f(u) = \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-2}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A}{u-a} + g(u),$$

qui met en évidence la partie principale cherchée. On peut alors écrire la formule de décomposition, quand on a fait ce calcul pour chacun des pôles situés dans le parallélogramme choisi. D'après une remarque du numéro précédent, on peut, dans ces calculs comme dans la formule finale de décomposition, remplacer chacun des pôles tels que a par un point homologue, $a + 2m\omega + 2n\omega'$.

La principale difficulté pour la décomposition en éléments simples est la détermination des pôles $a, b, \ldots, l$, de même que pour la décomposition d'une fraction rationnelle, la principale difficulté est de trouver les racines du dénominateur. Nous reviendrons sur ce point au n° 50.

30. **Il ne peut pas exister de fonctions elliptiques ayant un seul pôle dans un parallélogramme, si ce pôle est du premier ordre.** — En effet, si la fonction $f(u)$ n'avait qu'un pôle simple a de résidu A, la formule précédente (31) donnant $f(u)$ ne contiendrait qu'un terme $AZ(u-a)$. Mais la somme des résidus étant nulle, on aurait $A = 0$ et $f(u) = C_0$. La fonction serait donc une constante et n'aurait pas de pôle.

Mais il existe des fonctions elliptiques ayant dans un parallélogramme deux pôles seulement, *simples tous deux*, $u = a$ et $u = b$. En effet, dans cette hypothèse, la formule (31) comprend deux termes et l'on a $A + B = 0$; la fonction $f(u)$ est alors

$$f(u) = C_0 + A[Z(u-a) - Z(u-b)].$$

Il existe aussi des fonctions elliptiques ayant dans un parallélo-

gramme élémentaire un seul pôle, pourvu qu'il soit d'ordre supérieur au premier; le résidu relatif à ce pôle est *nul*. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour pu qui admet l'origine et les points homologues comme pôles doubles de résidus nuls.

D'une manière générale, les dérivées et les puissances positives de pu sont des fonctions elliptiques ayant dans chaque parallélogramme un seul pôle, homologue du point $u=0$; ce pôle est d'ordre supérieur à 1 et le résidu correspondant est nul.

31. **Exemple. Décomposition de $p^2 u$ en éléments simples.** — La série qui définit pu montre que, dans le voisinage de $u=0$, on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + G(u),$$

$G(u)$ étant une fonction holomorphe au point 0, fonction définie par la série

$$G(u) = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]. \tag{35}$$

Comme $G(u)$ est paire et s'annule manifestement pour $u=0$, on a, en développant cette fonction en série de puissances dans le voisinage de $u=0$,

$$G(u) = \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

où, conformément aux notations de Weierstrass, nous appelons $\frac{g_2}{20}$ et $\frac{g_3}{28}$ les deux premiers coefficients

$$\frac{g_2}{20} = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad \frac{g_3}{28} = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}. \tag{36}$$

Ces expressions de g_2 et g_3 s'obtiennent immédiatement en développant chaque terme de la série (35) suivant les puissances ascendantes de u, par la formule

$$\frac{1}{(u-w)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \frac{5u^4}{w^6} + \ldots,$$

puis en ordonnant la somme par rapport aux puissances ascendantes de u, opération légitime, comme on le démontre aisément.

On a donc, dans le voisinage de $u = 0$,

(37) $$pu = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots,$$

l'étoile tenant lieu d'un terme manquant, et en élevant au carré,

$$p^2 u = \frac{1}{u^4} + \star + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14}u^2 + \ldots.$$

Considérons un parallélogramme des périodes entourant le point $u = 0$; dans ce parallélogramme, $p^2 u$ a, comme seul pôle, $u = 0$; ce pôle est d'ordre 4 et la partie principale correspondante est $\frac{1}{u^4}$, d'après le développement ci-dessus. Dans la formule de décomposition en éléments simples (34), il faudrait donc prendre un seul pôle $a = 0$, puis $\alpha = 4$, $A = A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = 1$. On a alors

(38) $$p^2 u = D_0 + \frac{1}{6}p'' u,$$

D_0 désignant une constante.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement cette formule. D'après le développement de pu on a, en différentiant,

$$p' u = -\frac{2}{u^3} + \star + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \ldots.$$

$$p'' u = \frac{6}{u^4} + \star + \frac{g_2}{10} + \frac{3g_3}{7}u^2 + \ldots.$$

Donc la différence

$$\Phi(u) = p^2 u - \frac{1}{6}p'' u$$

est holomorphe au point $u = 0$, car, dans le second membre, les termes en $\frac{1}{u}$ disparaissent. La fonction $\Phi(u)$ est donc *holomorphe* dans tout le parallélogramme élémentaire considéré (contenant l'origine), et, comme elle admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$, elle est égale à une *constante* D_0.

La formule (38) est ainsi vérifiée. Pour déterminer la constante, on donnera à u une valeur particulière. D'après les développements de p^2 et de p'', on a, dans le voisinage de $u = 0$,

$$D_0 = p^2 u - \frac{1}{6}p'' u = \frac{g_2}{12} + \ldots,$$

d'où en faisant $u=0$, $D_0=\frac{g_2}{12}$. On a ainsi la formule

$$(39)\qquad p^2 u = \frac{1}{6}p'' u + \frac{g_2}{12}.$$

On formera de même, à titre d'exercice, les expressions de $p^3 u$, $p^4 u$, ... en fonctions linéaires de p, p', p'', ... par la formule de décomposition en éléments simples. Ces expressions se tirent aussi des formules obtenues en différentiant la relation (39) un nombre quelconque de fois et tenant compte de la relation que nous allons établir entre p et p'.

32. Relation algébrique entre pu et sa dérivée $p'u$. — Multiplions les deux membres de la relation (39) par $p'u$ et intégrons par rapport à u; nous obtiendrons une formule qu'on peut écrire

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p + C,$$

où C désigne une constante.

Pour déterminer cette constante, on remplacera encore p, p' par leurs développements en séries donnés plus haut : on vérifiera que les termes en $\frac{1}{u}$ disparaissent, et en faisant ensuite $u=0$, on trouvera $C=-g_3$. On a donc la relation

$$(40)\qquad p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3,$$

algébrique en p et p'. Son second membre est un polynome du troisième degré en pu; nous verrons bientôt que ses trois racines sont essentiellement distinctes lorsque la fonction pu n'est pas dégénérée.

La formule (40) donne la dérivée de la fonction inverse de pu. Faisons

$$pu = z,$$

d'où l'on tire, en imaginant l'équation résolue par rapport à u,

$$u = \arg p\, z$$

(c'est-à-dire : u égale l'argument dont le p est z). La formule (40)

donne alors

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

La *dérivée de u par rapport à z est donc algébrique en z*, tout comme la dérivée de arc sin z.

Comme z est infini quand u est nul, on a

$$(41) \qquad u = \pm \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

formule permettant de calculer u en fonction de z.

33. **Développements en séries de puissances de** pu, ζu, σu. — Les constantes g_2 et g_3 s'appellent les *deux invariants;* nous verrons plus loin (Chap. XIII, n° 240) la raison de cette dénomination. Ces constantes étant connues, on a, comme il suit, les développements en séries de p, ζ, σ.

Faisons, dans le voisinage de $u = 0$,

$$(42) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \star + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \ldots.$$

Les deux premiers coefficients sont

$$(43) \qquad c_2 = \frac{g_2}{2^2.5}, \qquad c_3 = \frac{g_3}{2^2.7}.$$

Les suivants se calculent facilement par voie récurrente en substituant le développement de p dans l'équation

$$p^2 u = \frac{1}{6} p'' u + \frac{g_2}{12},$$

et identifiant les deux membres. On trouve ainsi, pour λ plus grand que 3, la formule récurrente

$$(44) \qquad c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, \lambda-2),$$

qui montre que tous les coefficients sont des polynomes en g_2

et g_3 à coefficients numériques. Ainsi,

$$(45)\qquad c_4 = \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}, \qquad c_5 = \frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11};$$

et l'on conclut de là que deux fonctions pu qui possèdent les mêmes invariants sont nécessairement identiques : car les coefficients de leurs développements dans le voisinage de l'origine sont respectivement identiques.

Le développement de ζu pour de petites valeurs de u se tire immédiatement de (42) par une intégration, puisque $\zeta u = -\int pu\,du$; on a donc

$$(46)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{1}{3}c_2u^3 - \frac{1}{5}c_3u^5 + \ldots,$$

sans ajouter de constante, car ζu est une fonction impaire. Les coefficients de ce développement sont aussi des polynomes en g_2 et g_3.

Les deux développements de p et ζ convergent dans le plus grand cercle ayant pour centre l'origine et ne contenant dans son intérieur aucun point homologue de l'origine (n° 4).

Du développement de ζ on déduit celui de σ, puisque

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u.$$

Intégrant et passant des logarithmes aux nombres, on a

$$\sigma u = u\,e^{-\frac{c_2u^4}{12} - \frac{c_3u^6}{30} + \ldots}$$

sans mettre de constante en facteur, car $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers zéro. Il ne reste plus qu'à développer l'exponentielle en série et l'on a le développement de σu. On voit que les coefficients de ce développement sont aussi des polynomes entiers en g_2 et g_3. Voici les premiers termes du développement :

$$(47)\qquad \sigma u = u + \star - \frac{g_2u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2u^9}{2^9.3^2.5.7} - \frac{g_2g_3u^{11}}{2^7.3^2.5^2.7.11} - \ldots$$

On trouvera ce développement poussé jusqu'à u^{35} dans les feuilles de M. Schwarz (*Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques;* traduit de l'allemand par M. H. Padé,

p. 57). Puisque σu, comme $\sin u$, est une fonction entière, le développement (47) est convergent pour toutes les valeurs de u. Ce développement est commode pour le calcul des valeurs numériques de σu, $\sigma' u$, $\sigma'' u$ et, par suite, de ζ et p qui s'expriment rationnellement à l'aide des dérivées de σ :

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad p u = -\zeta' u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u}.$$

34. Inversion dans les notations de Weierstrass. – D'après ces propriétés, il est naturel d'admettre que, si l'on a une équation de la forme

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \tag{48}$$

où g_2 et g_3 sont des constantes données, on peut trouver deux périodes 2ω et $2\omega'$, telles que, pu et σu étant les fonctions de Weierstrass construites avec ces périodes, on ait

$$z = pu = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u};$$

dans cette hypothèse, z est donc exprimé en fonction uniforme de u, et, à l'aide des séries précédentes, ou de celles du n° 21, on peut calculer la valeur de z correspondant à une valeur de u. On a ainsi une solution du *problème de l'inversion* de l'intégrale (48).

Effectivement, nous démontrerons plus loin (Chap. VIII) comment g_2 et g_3 ayant des valeurs *réelles* données, on peut calculer un couple de périodes 2ω et $2\omega'$. Quant à la justification complète de l'hypothèse que nous venons de faire, elle nécessite des développements plus étendus qu'on trouvera au Chapitre XIII (n° 260) ainsi qu'à la Note VI. En attendant de pouvoir donner cette démonstration, *nous admettrons, dans toutes les applications qui vont suivre, qu'à tout couple de nombres g_2 et g_3 correspond une fonction* pu (dégénérée ou non) *ayant g_2 et g_3 pour invariants.*

35. Intégration d'une fonction elliptique. — Pour calculer l'intégrale

$$\int f(u)\, du$$

d'une fonction elliptique $f(u)$, on fait comme pour les fonctions rationnelles : on décompose $f(u)$ en éléments simples et l'on intègre terme à terme. Ainsi, dans les notations de Weierstrass, $f(u)$ peut se mettre sous la forme (34). En intégrant, on a

$$\int f(u)\,du = \text{const.} + D_0 u + \sum\Big[A \log \sigma(u-a) - A_1 \zeta(u-a) - \frac{A_2}{1.2}\,p(u-a) + \ldots - (-1)^{\alpha-1}\frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\,p^{(\alpha-3)}(u-a)\Big].$$

Par exemple, la formule de décomposition établie pour $p^2 u$ (n° 31) donne

$$\int p^2 u\,du = \frac{1}{6}p'u + \frac{g_2}{12}u + \text{const.} \tag{49}$$

36. **Homogénéité.** — Pour indiquer les valeurs des périodes ou des invariants, Weierstrass emploie les notations suivantes :

$$\sigma u = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u;\, g_2,\, g_3),$$
$$p u = p(u \mid \omega, \omega') = p(u;\, g_2,\, g_3).$$

D'après le produit qui définit σu, il est évident que si l'on multiplie ω, ω' et u par un même facteur μ, $\dfrac{u}{w}$ ne change pas et l'on a

$$\sigma(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \mu\,\sigma(u \mid \omega, \omega'). \tag{50}$$

Différentiant par rapport à u, on a

$$\sigma'(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \sigma'(u \mid \omega, \omega'). \tag{51}$$

Donc

$$\zeta(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu}\zeta(u \mid \omega, \omega'). \tag{52}$$

Différentiant encore par rapport à u,

$$p(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^2}p(u \mid \omega, \omega'), \tag{53}$$

ce qu'on vérifie d'ailleurs immédiatement sur la série donnant p.

D'après les expressions de g_2 et g_3 par des séries doubles

(n° 31) :

$$g_2 = 2^2.3.5 \sum' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7 \sum' \frac{1}{w^6},$$

quand on remplace ω et ω' par $\mu\omega$ et $\mu\omega'$, w est remplacé par μw, et g_2 et g_3, par $\frac{g_2}{\mu^4}$ et $\frac{g_3}{\mu^6}$. On a donc aussi

$$(54) \qquad \begin{cases} \sigma\left(\mu u; \dfrac{g_2}{\mu^4}, \dfrac{g_3}{\mu^6}\right) = \mu\,\sigma(u; g_2, g_3), \\ p\left(\mu u; \dfrac{g_2}{\mu^4}, \dfrac{g_3}{\mu^6}\right) = \dfrac{1}{\mu^2}\, p(u; g_2, g_3). \end{cases}$$

L'expression $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ est une fonction de ω et ω' qui ne change pas quand on multiplie ω et ω' par un même facteur arbitraire μ; *c'est une fonction du seul rapport des périodes*. Nous reviendrons au Chapitre XIII sur ce point important et sur ses conséquences.

37. Cas de dégénérescence. — Quand une des périodes est infinie, ω' par exemple, on a

$$g_2 = 2^2.3.5 \sum' \frac{1}{2^4 m^4 \omega^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7 \sum' \frac{1}{2^6 m^6 \omega^6},$$

et comme on a (n° 15)

$$\sum' \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{3^2.5}, \qquad \sum' \frac{1}{m^6} = \frac{2\pi^6}{3^3.5.7},$$

il vient

$$g_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega^2}\right)^2, \qquad g_3 = \frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega^2}\right)^3.$$

Donc on a, dans ce cas,

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

Le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$ a alors une racine double, et l'intégrale

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

peut s'exprimer par des fonctions circulaires, comme il était prévu d'après les formules du n° 23. En calculant cette intégrale élé-

mentaire, on retrouverait ainsi d'une autre manière les formules du n° 23 (*voyez* l'exercice 1 de la fin du Chapitre).

Quand les deux périodes ω et ω' sont infinies, on a $g_2 = g_3 = 0$ et le polynome sous le radical a une racine triple. L'intégrale devient alors

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3}},$$

qui donne immédiatement

$$z = \frac{1}{u^2}.$$

III. — Deuxième forme des fonctions elliptiques. Décomposition en facteurs. Conséquences.

38. Décomposition en facteurs. — Nous allons indiquer maintenant une deuxième forme, sous laquelle on peut mettre toute fonction elliptique $f(u)$ et qui est analogue à la forme d'une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur seraient décomposés en facteurs du premier degré.

Cette nouvelle forme résulte immédiatement de l'application des théorèmes précédents à la fonction $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$.

Remarquons d'abord qu'une fonction elliptique a nécessairement un nombre limité de zéros dans un parallélogramme des périodes. Car, si elle en avait une infinité, il existerait à l'intérieur du parallélogramme au moins un point a dans le voisinage duquel il y aurait une infinité de zéros; c'est ce qu'on verrait comme au n° 20 pour les pôles; et a serait un point essentiel (n° 4), ce qui est impossible puisque $f(u)$ doit être méromorphe (n° 17).

Cela posé, soit une fonction elliptique $f(u)$ ayant, dans un parallélogramme des périodes, les pôles ou infinis simples a_1, a_2, ..., a_r au nombre de r, et les zéros simples b_1, b_2, ..., b_s au nombre de s. La fonction $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ est une fonction elliptique holomorphe partout où $f(u)$ n'est ni nul ni infini. Un zéro simple $f(u)$ est pour $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ un pôle simple de résidu 1, et un pôle simple de $f(u)$ est pour $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ un pôle simple de résidu -1 (n° 5).

On a donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f'(u)}{f(u)} &= c + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_2) + \ldots + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_s) \\ &\quad - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_2) + \ldots - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_r), \end{aligned}\right.$$

où $\frac{\sigma'}{\sigma}$ est la fonction ζ. En outre, la somme des résidus de $\frac{f'(u)}{f(u)}$ relatifs à tous les pôles devant être *nulle*, on a

$$s - r = 0.$$

Donc : *Dans un parallélogramme élémentaire, le nombre des zéros d'une fonction elliptique est égal au nombre des infinis.* Ce nombre se nomme *l'ordre de la fonction elliptique;* nous reviendrons plus loin sur cette définition de l'ordre.

D'après ce théorème, faisons $s = r$ dans la formule (55) et intégrons terme à terme, puis passons des logarithmes aux nombres; nous aurons la formule cherchée

$$(56)\qquad f(u) = a\,e^{cu}\,\frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

où a est une nouvelle constante. Cette formule met en évidence les zéros et les infinis de $f(u)$.

Si la fonction $f(u)$ a des zéros ou des pôles multiples, la même formule s'applique; il suffit de supposer que plusieurs des points $b_1, b_2, \ldots$ sont confondus en un seul, ou qu'il en est de même de plusieurs des points $a_1, a_2, \ldots$; et l'on peut dire, d'une manière générale, que, *dans un parallélogramme élémentaire, le nombre des zéros d'une fonction elliptique quelconque est égal à celui de ses pôles* (chacun d'eux étant répété autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité) : ce nombre est encore l'*ordre* de la fonction elliptique.

Dans la démonstration, nous avons supposé que les points a_1, $a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sont situés dans un même parallélogramme; mais cette restriction n'est pas nécessaire, et en modifiant convenablement les valeurs des constantes c et a, on peut remplacer un ou plusieurs points a_ν ou b_ν par des points homologues (*cf.* n° 28). Par exemple, considérons le point

$$a'_1 = a_1 + 2\omega,$$

homologue de a_1. En remplaçant dans la formule (22) a_1 par $a'_1 - 2\omega$, on a,

$$\sigma(u - a_1) = \sigma(u - a'_1 + 2\omega) = - e^{2\eta(u - a'_1 + \omega)}\sigma(u - a'_1)$$

et, par suite,

$$f(u) = a' e^{c'u} \frac{\sigma(u - b_1)\sigma(u - b_2)\ldots\sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a'_1)\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_r)},$$

avec

$$c' = c - 2\eta_1, \qquad a' = - a\, e^{2\eta(a'_1 - \omega)}.$$

39. **Théorème de Liouville.** — *Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction elliptique situés dans un parallélogramme des périodes, la somme des zéros ne diffère de la somme des infinis que par des multiples des périodes.*

On démontre immédiatement ce théorème en écrivant que la fonction $f(u)$ sous la forme (56) admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$. Comme on a

$$\sigma(u - \alpha + 2\omega) = - e^{2\eta(u - \alpha + \omega)}\sigma(u - \alpha),$$

on voit que le rapport $\dfrac{f(u + 2\omega)}{f(u)}$ est égal à

$$e^{2c\omega + 2\eta(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r)}.$$

Ce rapport devant être l'unité, on a

$$(57) \qquad 2c\omega + 2\eta(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r) = 2n\pi i,$$

où n est un entier. Écrivant de même que $\dfrac{f(u + 2\omega')}{f(u)} = 1$, on a

$$(57') \qquad 2c\omega' + 2\eta'(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r) = -2m\pi i.$$

Éliminant c entre ces deux équations, on a, en vertu de la relation $\eta\omega' - \omega\eta' = \dfrac{\pi i}{2}$ que nous établirons plus loin (nº 73, p. 115),

$$(58) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r = 2m\omega + 2n\omega';$$

ce qui *démontre le théorème.*

La valeur de la constante c est alors donnée par l'une ou l'autre des formules (57) ou (57').

Mais on peut simplifier un peu la formule en mettant à profit une remarque faite plus haut. Remplaçons le point a_1 par le point homologue

$$a'_1 = a_1 - 2m\omega - 2n\omega'.$$

La formule donnant $f(u)$ prendra la forme

$$f(u) = \mathrm{A}\, e^{\mathrm{C}u} \frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a'_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

où l'on a

(59) $$a'_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r.$$

Mais alors, en exprimant que $f(u)$ admet les périodes 2ω et $2\omega'$, on a, par un calcul analogue à celui que nous venons de faire,

$$2\mathrm{C}\omega = 2\mathrm{N}\pi i, \quad 2\mathrm{C}\omega' = -2\mathrm{M}\pi i,$$

M et N désignant des entiers. On en conclut

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\omega') = 0.$$

Le facteur $\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\omega'$ ne peut pas être nul, car le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est imaginaire et ne peut pas être égal à $-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$. Donc

$$\mathrm{C} = 0.$$

On peut donc toujours mettre une fonction elliptique sous la forme

(60) $$f(u) = \mathrm{A}\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a'_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

avec la condition (59). On pourrait de même remplacer d'autres zéros et infinis par des points homologues : la formule reste la même pourvu que la somme des zéros choisis égale celle des infinis.

40. Notation de Jacobi. — La formule de décomposition en facteurs s'écrit comme il suit dans les notations de Jacobi. La fonction H de Jacobi est liée à la fonction σ par la relation (n° 21)

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{H}'(0)\, e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\, \sigma u,$$

d'où

$$\sigma u = \frac{1}{\mathrm{H}'(0)}\, e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\, \mathrm{H}(u).$$

Remplaçant alors σu par cette expression dans la formule (60) et tenant compte de

$$a'_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r,$$

il vient

$$f(u) = \mathrm{A}' \frac{\mathrm{H}(u-b_1)\,\mathrm{H}(u-b_2)\ldots\mathrm{H}(u-b_r)}{\mathrm{H}(u-a'_1)\,\mathrm{H}(u-a_2)\ldots\mathrm{H}(u-a_r)}, \tag{61}$$

A$'$ désignant une constante. On a donc, en définitive, la même formule fondamentale dans les deux systèmes de notations.

41. **Deux fonctions elliptiques ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis ne diffèrent que par un facteur constant.** — Cela résulte des formules précédentes où le facteur A seul est arbitraire, une fois les zéros et les infinis donnés.

42. **Ordre d'une fonction elliptique.** — Terminons par quelques remarques sur l'ordre d'une fonction elliptique. On a appelé *ordre* de la fonction (n° 38) le nombre de pôles qu'elle possède dans un parallélogramme élémentaire, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité. Ce nombre est aussi égal au nombre des zéros situés dans un parallélogramme :

Ainsi pu est du second ordre, $p'u$ du troisième.

La fonction elliptique $f(u)$ étant d'ordre r, la fonction $f(u) - \mathrm{C}$, où C est une constante quelconque, est aussi d'ordre r, car les pôles de $f(u)$ et $f(u) - \mathrm{C}$ sont évidemment les mêmes. La fonction $f(u) - \mathrm{C}$ a donc, dans un parallélogramme, r zéros quel que soit C. Ainsi l'équation

$$f(u) = \mathrm{C}$$

a toujours r racines dans un parallélogramme. La valeur *minimum* que puisse prendre r est 2, car, d'après le théorème du n° 30, il n'existe pas de fonction elliptique du premier ordre.

Exemple. — La fonction pu est du second ordre. Dans un parallélogramme des périodes il existe deux valeurs de u telles que $pu = \mathrm{C}$. L'une d'elles étant α, l'autre est homologue du point $-\alpha$, car pu est paire. Ces deux racines sont distinctes tant que les deux points α et $-\alpha$ ne sont pas homologues, c'est-à-dire

tant que l'on n'a pas

$$\alpha = -\alpha + 2m\omega + 2n\omega',$$
$$\alpha = m\omega + n\omega',$$

et $C = p(m\omega + n\omega')$.

Si les entiers m et n sont pairs tous deux, cette valeur de C est infinie : effectivement, l'équation $pu = \infty$ a dans chaque parallélogramme une racine double.

Si un des entiers m ou n est impair, ou si tous deux le sont, C est fini : on trouve ainsi, à cause de la périodicité de p, trois valeurs différentes de C pour lesquelles l'équation $pu - C = 0$ a, dans chaque parallélogramme, une racine double. Ces valeurs sont les suivantes :

m impair, n pair, $C_1 = p\omega$;
m pair, n impair, $C_2 = p\omega'$;
m et n impairs, $C_3 = p(\omega + \omega')$.

La racine double de $pu - C = 0$ est, dans le premier cas, congrue à ω, dans le second à ω', dans le troisième à $\omega + \omega'$. Ces trois valeurs annulent la dérivée $p'u$: les valeurs correspondantes de C sont les trois racines du polynome

$$4z^3 - g_2 z - g_3,$$

comme nous le montrons plus loin (n° 46).

IV. — Exemples de décomposition en facteurs et en éléments simples. Formule d'addition algébrique pour pu. Conséquences.

43. **Décomposer en facteurs la fonction doublement périodique**

$$f(u) = pu - pv,$$

où v est une constante. — Dans un parallélogramme des périodes, pu admet 0 comme infini double. Donc (n° 42) la fonction admet deux zéros dans un parallélogramme des périodes ; on voit que ce sont les homologues des points $u = v$ et $u = -v$ puisque p est paire. On a donc

$$pu - pv = A\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u},$$

A désignant une constante.

Cette constante se détermine en multipliant les deux membres par u^2 et en faisant ensuite tendre u vers zéro. Il vient

$$1 = -A\sigma^2 v.$$

La décomposition est donc donnée par la formule

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u . \sigma^2 v}. \tag{62}$$

44. Formule d'addition pour ζu. — Si l'on prend les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité précédente, par rapport à u, il vient, v étant considéré comme une constante :

$$\frac{p'u}{pu - pv} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u; \tag{63}$$

puis, en échangeant u et v,

$$\frac{-p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v; \tag{64}$$

enfin, en ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$\frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v, \tag{65}$$

formule que l'on obtiendrait également en décomposant en éléments simples les fonctions elliptiques de u qui figurent dans les premiers membres. La formule (65) peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction ζu : seulement ce n'est pas une formule d'addition *algébrique*, car $\zeta(u+v)$ n'est pas une fonction algébrique de ζu et ζv.

45. Formule d'addition de la fonction pu. — Si l'on différentie par rapport à u les deux membres de l'égalité précédente, on trouve

$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right); \tag{66}$$

c'est une formule d'addition algébrique pour pu. En y remplaçant, après la dérivation, $p''u$ par sa valeur $6p^2 u - \frac{g_2}{2}$ (éq. 39), on obtient $p(u+v)$ en fonction *rationnelle* de pu, pv, $p'u$ et $p'v$.

Si, ensuite, on y remplace $p'u$ et $p'v$ par leurs valeurs respectives en fonction de pu et pv

$$p'u = \sqrt{4p^3u - g_2pu - g_3}, \qquad p'v = \sqrt{4p^3v - g_2pv - g_3},$$

on obtient $p(u+v)$ en fonction *algébrique* de pu et pv.

Autre forme de la formule d'addition. — On a, en effectuant la différentiation (66),

$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{p''u}{pu - pv} - \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)p'u}{(pu-pv)^2};$$

permutant u et v, on a de même

$$pv - p(u+v) = -\frac{1}{2}\frac{p''v}{pu - pv} + \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)p'v}{(pu-pv)^2}.$$

Ajoutons membre à membre et remarquons que

$$p''u - p''v = 6(p^2u - p^2v),$$

d'après l'équation (39); il vient

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 - pu - pv, \tag{67}$$

et l'on a $p(u+v)$ par une formule où la symétrie, par rapport aux deux lettres u et v, est en évidence.

En différentiant par rapport à u et remplaçant $p''u$ par $6p^2u - \frac{1}{2}g_2$, on a de même une formule d'addition pour $p'(u+v)$, exprimant cette fonction en fonction rationnelle de pu, $p'u$, pv, $p'v$. Une nouvelle différentiation donnera une formule d'addition pour p''; etc.

46. Décomposition de $p'u$ en facteurs. Discriminant. — Dans un parallélogramme élémentaire, la fonction $p'u$ a un pôle triple qui est le point $u = 0$, ou un point homologue. Cette fonction est donc du troisième ordre. Elle a, dans un parallélogramme, trois zéros que nous allons déterminer. Pour cela, partons des relations

$$p'(u+2\omega) = p'u, \qquad p'(u+2\omega') = p'u,$$
$$p'(u+2\omega+2\omega') = p'u.$$

Faisant dans la première de ces formules $u = -\omega$, on a

$$p'\omega = p'(-\omega);$$

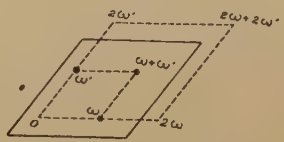
comme d'autre part p' est impaire,

$$p'\omega = -p'(-\omega).$$

Donc $p'\omega = 0$. De même $p'\omega' = 0$.

Enfin, en faisant dans la troisième formule $u = -\omega - \omega'$, on voit que $p'(\omega + \omega') = 0$. Prenons (n° 28, p. 38) un parallélogramme

Fig. 4.



élémentaire très voisin de celui dont les sommets sont o, 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$ et contenant o dans son intérieur. Alors, dans ce parallélogramme tracé en traits pleins, la fonction a un seul pôle $u = 0$, et ce pôle est triple; nous savons d'ailleurs que la fonction a trois zéros ω, ω', $\omega + \omega'$; ces zéros sont donc simples, et ce sont les seuls que la fonction possède dans le parallélogramme (n° 38). On vérifie que la somme des zéros $2\omega + 2\omega'$ ne diffère de la somme des infinis qui est o que par des multiples de périodes (n° 39).

Remplaçons le zéro $\omega + \omega'$ par son homologue $-\omega - \omega'$; alors la somme des trois zéros ω, ω', $-\omega - \omega'$ est égale à la somme des trois infinis qui est nulle et l'on a, en vertu de (59) et de (60) :

$$p'u = A\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3 u}.$$

Pour déterminer A, on peut multiplier les deux membres par u^3, puis faire tendre u vers o. Comme dans le voisinage de o on a

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \text{fonction holomorphe},$$

le premier membre devient -2; comme $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1, le second membre devient

$$A\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega+\omega')$$

et l'on a

$$p'u = -2\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega+\omega')\sigma^3 u}.$$

Voici quelques conséquences des résultats précédents. Nous avons établi la relation

(40) $$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Appelons e_1, e_2, e_3 les racines du polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$; alors

(68) $$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3).$$

Comme $p'u$ s'annule pour $u = \omega$, $u = \omega + \omega'$, $u = \omega'$, les quantités e_1, e_2, e_3 sont égales à $p\omega$, $p(\omega + \omega')$, $p\omega'$, soit

(69) $$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

Il est évident, d'après la formule (68) qui donne $p'^2 u$, que le second membre de cette formule est le carré d'une fonction uniforme : nous vérifions plus loin (nº 48) que chacune des différences $pu - e_1$, $pu - e_2$, $pu - e_3$ est le carré d'une fonction uniforme.

Discriminant. — Rappelons enfin comment on calcule le produit des carrés des différences des racines e_1, e_2, e_3. Partons de l'identité en z :

$$4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3) = 4z^3 - g_2 z - g_3;$$

dérivons-la par rapport à z, et faisons $z = e_1$ dans l'équation obtenue; nous aurons

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 3e_1^2 - \frac{g_2}{4}.$$

Adjoignons à cette équation les deux autres qui s'en déduisent par permutation circulaire sur e_1, e_2, e_3, et multiplions membre à membre les équations obtenues; il viendra

$$-(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 = \left(3e_1^2 - \frac{g_2}{4}\right)\left(3e_2^2 - \frac{g_2}{4}\right)\left(3e_3^2 - \frac{g_2}{4}\right).$$

Or le second membre de cette équation est une fonction symétrique de e_1, e_2, e_3 dont il est aisé d'obtenir la valeur; on a,

en effet :

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = \frac{g_2}{2},$$

$$e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2 + e_1^2 e_2^2 = (e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2)^2 - 2 e_1 e_2 e_3 (e_1 + e_2 + e_3) = \frac{g_2^2}{16},$$

$$e_1^2 e_2^2 e_3^2 = \frac{g_3^2}{16};$$

introduites dans l'équation précédente, ces expressions donnent

$$-(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \frac{27 g_3^2}{16} - \frac{9}{4}\frac{g_2^3}{16} + \frac{3}{2}\frac{g_2^3}{16} - \frac{g_2^3}{64} = \frac{27 g_3^2 - g_2^3}{16}.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\Delta = 16(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2,$$

on pourra écrire $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$. Par définition, l'expression Δ s'appelle le *discriminant* du polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$ (ou de la fonction elliptique pu). Il est nul dans le cas de dégénérescence (n° 37); et nous verrons dans un instant qu'il est toujours différent de zéro pour une fonction pu non dégénérée. Si les invariants g_2 et g_3 sont réels, Δ est positif quand les trois racines sont réelles, et négatif quand une seule des racines est réelle, les deux autres étant imaginaires conjuguées.

47. **Effet de l'addition d'une demi-période à l'argument de** pu. — Dans la formule d'addition (67) faisons $v = \omega$, en remarquant que $p\omega = e_1$, $p'\omega = 0$ et en tenant compte de l'expression (68) de p'^2. Nous obtenons

$$p(u + \omega) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1}.$$

De même, en faisant dans la formule d'addition $v = \omega + \omega'$ ou $v = \omega'$, on trouve

$$p(u + \omega + \omega') - e_2 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{pu - e_2},$$

$$p(u + \omega') - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pu - e_3}.$$

Ces formules montrent bien qu'on a $\Delta \neq 0$ pour une fonction elliptique pu non dégénérée : car, si l'on avait, par exemple,

$e_1 = e_2$, on en déduirait que pu ou $p(u+\omega)$ est égal à la constante e_1, ce qui est absurde.

48. Expressions de $pu - e_\lambda$. Fonctions σ_1, σ_2, σ_3. — Dans la formule (62) établie plus haut

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v},$$

faisons $v = \omega$, nous aurons

$$pu - p\omega = -\frac{\sigma(u+\omega)\sigma(u-\omega)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega};$$

mais, d'après les propriétés de la fonction σ, on a

$$\sigma(u+\omega) = -e^{2\eta u}\sigma(u-\omega),$$

comme on le voit en changeant dans la première des formules (22) u en $u-\omega$. On a donc

$$pu - p\omega = e^{2\eta u}\frac{\sigma^2(u-\omega)}{\sigma^2 u . \sigma^2 \omega}. \tag{70}$$

On trouve de même

$$pu - p\omega' = e^{2\eta' u}\frac{\sigma^2(u-\omega')}{\sigma^2 u . \sigma^2 \omega'}. \tag{70'}$$

Enfin, dans la relation (62), faisons $v = \omega + \omega'$; il vient

$$pu - p(\omega+\omega') = -\frac{\sigma(u+\omega+\omega')\sigma(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u\, \sigma^2(\omega+\omega')},$$

ou d'après la formule (23), dans laquelle on change u en $u-\omega-\omega'$,

$$pu - p(\omega+\omega') = e^{2(\eta+\eta')u}\frac{\sigma^2(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u . \sigma^2(\omega+\omega')}. \tag{71}$$

Les trois différences considérées sont donc bien les carrés de fonctions uniformes. Weierstrass emploie une notation spéciale pour désigner ces trois fonctions. Il fait :

$$\begin{cases} \sigma_1 u = \dfrac{e^{\eta u}\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega}, \\ \sigma_2 u = \dfrac{e^{(\eta+\eta')u}\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')}, \\ \sigma_3 u = \dfrac{e^{\eta' u}\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'}. \end{cases} \tag{72}$$

Avec ces notations, on a

$$(73)\quad pu-e_1=\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2,\quad pu-e_2=\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2,\quad pu-e_3=\left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2,$$

$$p'^2 u = 4\frac{(\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u)^2}{\sigma^6 u},$$

$$(74)\qquad p'u = -2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u};$$

le signe à prendre en extrayant la racine est —, comme on le voit en multipliant les deux membres par u^3 et faisant tendre u vers zéro. On retrouve ainsi, aux notations près, la formule établie directement dans le n° 46, par la décomposition de $p'u$ en facteurs.

49. Toute fonction elliptique $f(u)$ aux périodes 2ω et $2\omega'$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. — Nous établirons ce théorème comme conséquence du théorème d'addition et de la formule de décomposition en éléments simples (p. 37) :

$$f(u) = D_0 + \sum\Big[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{1.2}p'(u-a) - \ldots + (-1)^\alpha \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}p^{(\alpha-2)}(u-a)\Big],$$

la somme étant étendue à tous les pôles. Tout d'abord la formule d'addition pour pu (n° 45) montre que $p(u-a)$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. En différentiant cette formule on voit que $p'(u-a)$ est une fonction rationnelle de pu, $p'u$ et $p''u$; mais, comme

$$p''u = 6p^2 u - \frac{g_2}{2},$$

$p'(u-a)$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. On voit de même, en différentiant de proche en proche, que $p''(u-a)$, ..., $p^{(\alpha-2)}(u-a)$ sont des fonctions rationnelles de pu et $p'u$. Restent les termes tels que $\zeta(u-a)$. La formule d'addition pour la fonction ζ (n° 44) dans laquelle on remplace v par $-a$ donne

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u+p'a}{pu-pa};$$

on a de même $\zeta(u-b)$, ..., $\zeta(u-l)$. Si l'on porte ces valeurs

dans la formule de décomposition en éléments simples, on voit que, dans la somme

$$A\zeta(u-a)+B\zeta(u-b)+\ldots+L\zeta(u-l), \tag{75}$$

étendue à tous les pôles, le terme en ζu disparaît à cause de la relation $A+B+\ldots+L=0$ et la somme (75) est une fonction rationnelle de pu et $p'u$.

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Comme on a

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3,$$

on peut, dans une expression rationnelle en p et p', éliminer toutes les puissances de p' supérieures à la première en remplaçant toutes les puissances paires de p' par des polynomes en p. On met ainsi toute fonction rationnelle de p et p' sous la forme

$$\frac{P(p)+p'Q(p)}{P_1(p)+p'Q_1(p)},$$

où P, Q, P_1, Q_1 sont des polynomes entiers en p.

Multipliant et divisant cette expression par $P_1(p)-p'Q_1(p)$ et remplaçant p'^2 par sa valeur en fonction de p, on voit que toute fonction rationnelle de p et p', c'est-à-dire toute fonction elliptique peut se mettre sous la forme

$$f(u) = R(p)+p'R_1(p),$$

R et R_1 étant des fonctions rationnelles. On observera d'ailleurs que la démonstration donnée au début de ce numéro n'introduit que des expressions entières par rapport à $p'u$; on peut donc les remplacer aussitôt par un binome du premier degré en $p'u$.

De la formule précédente, il résulte

$$f(-u) = R(p)-p'R_1(p),$$

car p' est impaire. En particulier, si $f(u)$ est une fonction paire, $f(-u)$ doit être égal à $f(u)$; $R_1(p)$ est donc identiquement *nul* et l'on a

$$f(u) = R(p).$$

Si $f(u)$ est impaire, $f(-u)$ doit être égal à $-f(u)$ et $R(p)$,

identiquement nul. Alors

$$f(u) = p'\,R_1(p).$$

Ainsi, *une fonction elliptique paire est une fonction rationnelle de pu*; et *une fonction elliptique impaire est égale à une fonction rationnelle de pu multipliée par $p'u$*.

Par exemple, $p(2u)$, $p(3u)$, ..., $p(nu)$ (n entier) s'expriment rationnellement en fonction de pu. On a ainsi des formules analogues à celles de la multiplication des arcs en Trigonométrie, que le lecteur pourrait établir par l'application répétée de la formule d'addition.

De même $p'(nu)$ est égal à $p'u$ multipliée par une fonction rationnelle de pu.

50. **Remarque sur l'intégration d'une fonction elliptique supposée mise sous la forme d'une fonction rationnelle de p et p'.** — Soit la fonction

$$f(u) = R(pu) + p'u.R_1(pu),$$

où, comme précédemment, R et R_1 désignent des fonctions rationnelles de pu. On aura

$$\int f(u)\,du = \int R(pu)\,du + \int p'u.R_1(pu)\,du.$$

La deuxième intégrale du second membre se ramène immédiatement à l'intégrale d'une fonction rationnelle, car si l'on fait $pu = z$ elle devient

$$\int R_1(z)\,dz;$$

on sait calculer cette intégrale. Pour obtenir la première intégrale du second membre, on commencera par décomposer la fonction rationnelle R de pu en fractions simples, en considérant pu comme la variable; soit

$$\begin{aligned} R(pu) = {} & c_0 + c_1 pu + c_2 p^2 u + \ldots + c_\nu p^\nu u \\ & + \frac{A}{pu-\alpha} + \frac{A_1}{(pu-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(pu-\alpha)^3} + \ldots + \frac{B}{pu-\beta} + \ldots, \end{aligned}$$

c_0, c_1, ..., c_ν, A, A_1, A_2, ..., B, ..., α, β, ... étant des constantes. L'intégrale de la partie entière en pu s'obtient aisément,

car on sait (n° 31) exprimer $p^2 u$, $p^3 u$, ..., $p^\nu u$ en fonctions linéaires à coefficients constants de pu et de ses dérivées $p'u$, $p''u$, ..., de sorte que cette partie entière s'écrit

$$C_0 + C_1 pu + C_2 p'u + C_3 p''u + \dots;$$

son intégrale est immédiatement

$$C_0 u - C_1 \zeta u + C_2 pu + C_3 p'u + \dots.$$

Les intégrales des termes suivants s'obtiennent aussi en décomposant ces termes en éléments simples. Pour cela, on détermine d'abord des constantes a, b, ... telles que

$$pa = \alpha, \qquad pb = \beta, \qquad \dots.$$

Nous avons donné (n° 44, formule 64) la décomposition en éléments simples de $\frac{p'v}{pu - pv}$; nous écrirons cette formule

$$\frac{1}{pu - pv} = \frac{1}{p'v}[\zeta(u-v) - \zeta(u+v) + 2\zeta v]. \tag{76}$$

On en conclut, en changeant v en a,

$$\int \frac{du}{pu - pa} = \frac{1}{p'a}\left[\operatorname{Log}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right] + \text{const.}$$

Différentiant ensuite la formule (76) par rapport à v et divisant par $p'v$, on en tire la formule de décomposition en éléments simples pour $\frac{1}{(pu - pv)^2}$; différentiant cette nouvelle formule par rapport à v, on en tire de même la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(pu - pv)^3}$, ... et ainsi de suite. Dans ces formules on fera $v = a$ et l'on en déduira immédiatement les intégrales $\int \frac{du}{(pu - pa)^2}$, $\int \frac{du}{(pu - pa)^3}$, ...

51. **Entre deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $f_1(u)$ aux mêmes périodes existe une relation algébrique.** — En effet, si l'on fait

$$X = f(u), \qquad Y = f_1(u),$$

X et Y sont, d'après le théorème du n° 49, des fonctions ration-

nelles

$$(77) \qquad X = R(p, p'); \qquad Y = R_1(p, p'),$$

des quantités pu et $p'u$ liées par la relation

$$(78) \qquad p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

L'élimination de p et p' entre les relations (77) et (78) donne une relation algébrique entre X et Y :

$$F(X, Y) = 0.$$

La courbe (C) définie par cette équation est, en général, du *premier genre* (n° 13). C'est ainsi que si l'on fait

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

on a entre x et y la relation

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

définissant une cubique (c) sans point double, sauf dans le cas de dégénérescence. Les coordonnées X et Y d'un point de la courbe (C) sont des fonctions rationnelles des coordonnées x et y d'un point de la cubique (c).

On peut, en général, indiquer le degré de la relation entre X et Y. Si $f(u)$ est d'ordre r et $f_1(u)$ d'ordre r_1, la relation $F(X, Y) = 0$ est de degré r_1 en X et de degré r en Y.

En effet, X étant donné, la formule

$$X = f(u)$$

donne, pour u, r valeurs dans un parallélogramme ; à chacune de ces r valeurs, la formule

$$Y = f_1(u)$$

fait correspondre une seule valeur de Y. Donc à une valeur de X correspondent r valeurs de Y et l'équation $F(X, Y) = 0$ est de degré r en Y. On voit de même qu'elle est de degré r_1 en X.

Par exemple, pu est du second ordre, $p'u$ du troisième ; aussi la relation algébrique entre ces deux fonctions est-elle du second degré en p' et du troisième en p.

52. Toute fonction elliptique $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique. — En effet, $f(u)$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$:

$$f(u) = R(pu, p'u).$$

De même

$$f(v) = R(pv, p'v).$$

Formant ensuite $f(u+v)$ qui est une fonction rationnelle de $p(u+v)$ et $p'(u+v)$, et exprimant $p(u+v)$ et $p'(u+v)$ en fonction de pu, pv, $p'u$, $p'v$ par les formules d'addition, on voit que $f(u+v)$ est une fonction rationnelle de pu, pv, $p'u$, $p'v$, soit

$$f(u+v) = R_1(pu, pv, p'u, p'v).$$

D'ailleurs,

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$
$$p'^2 v = 4p^3 v - g_2 pv - g_3.$$

L'élimination de pu, pv, $p'u$, $p'v$ entre les cinq équations précédentes fournira une relation *algébrique* entre $f(u+v)$, $f(u)$ et $f(v)$.

La réciproque de ce théorème est vraie en ce sens que :

Toute fonction analytique uniforme transcendante qui a un théorème d'addition algébrique est nécessairement une fonction *simplement* ou *doublement* périodique. Nous nous bornons à énoncer cette proposition, dont la démonstration nous entraînerait en dehors du cadre de cet Ouvrage.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II.

1. Démontrer les formules suivantes que nous empruntons aux *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, d'après les Leçons de Weierstrass, rédigées par M. Schwarz, traduites par M. Padé, (p. 12-14).

Dégénérescence. — Quand $\omega' = \infty$, ω étant fini et différent de zéro, on a

$$(1) \quad pu = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\,u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2},$$

$$(2) \quad \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \qquad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \qquad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}, \qquad g_2^3 - 27g_3^2 = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \dfrac{\pi}{2\omega}\cot\dfrac{u\pi}{2\omega} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)^2 u, \qquad 2\eta\omega = \dfrac{\pi^2}{6}, \\ \sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\dfrac{2\omega}{\pi}\sin\dfrac{u\pi}{2\omega}. \end{cases}$$

On a aussi :

$$\sigma_1 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\cos\frac{u\pi}{2\omega},$$

$$\sigma_2 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} = \sigma_3 u.$$

(On le démontrera en rapprochant les formules des nos 23 et 37).

Formules d'addition pour pu et conséquences.

$$(1) \quad p(u \pm v) = pu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u \mp p'v}{pu - pv}\right) = pv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\pm p'u - p'v}{pu - pv}\right),$$

$$(2) \quad = pu + \frac{(6p^2u - \frac{1}{2}g_2)(pv - pu) + 4p^3u - g_2pu - g_3 \mp p'up'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(3) \quad = pv + \frac{(6p^2v - \frac{1}{2}g_2)(pu - pv) + 4p^3v - g_2pv - g_3 \mp p'up'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(4) \quad p(u \pm v) = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu + pv) - g_3 \mp p'up'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(5) \quad = \frac{1}{4}\left[\frac{p'u \mp p'v}{pu - pv}\right]^2 - pu - pv.$$

$$(6)\qquad \frac{1}{p(u\pm v)} = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu+pv) - g_3 \pm p'u\,p'v}{2(pu\,pv+\frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(pu+pv)},$$

$$(7)\qquad p(u+v)+p(u-v) = \frac{2(pu\,pv-\frac{1}{4}g_2)(pu+pv)-g_3}{(pu-pv)^2},$$

$$(8)\qquad = 2pu - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\operatorname{Log}(pu-pv) = 2pv - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\operatorname{Log}(pu-pv),$$

$$(9)\qquad p(u+v)-p(u-v) = -\frac{p'u\,p'v}{(pu-pv)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\operatorname{Log}(pu-pv),$$

$$(10)\qquad p(u+v)p(u-v) = \frac{(pu\,pv+\frac{1}{4}g_2)^2+g_3(pu+pv)}{(pu-pv)^2},$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} p'(u\pm v) = {} & \left[\frac{p'^2v}{(pv-pu)^3} - \frac{1}{2}\,\frac{p''v}{(pv-pu)^2}\right]p'u \\ & \pm\left[\frac{p'^2u}{(pu-pv)^3} - \frac{1}{2}\,\frac{p''u}{(pu-pv)^2}\right]p'v, \end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad 4[p(u)+p(v)+p(u+v)] = \left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2 = \left[\frac{p'(u+v)+p'v}{p(u+v)-pv}\right]^2,$$

$$(13)\qquad \frac{p'u-p'v}{pu-pv} = \frac{-p'(u+v)-p'v}{p(u+v)-pv},$$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & p(u+v) & -p'(u+v) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(15)\qquad p2u = \frac{(p^2u+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3pu}{4p^3u-g_2pu-g_3} = pu - \frac{1}{4}\,\frac{d^2}{du^2}\operatorname{Log}p'u.$$

Par l'intégration on déduit de la dernière formule

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\sigma'2u}{\sigma 2u} = 2\frac{\sigma'u}{\sigma u} + \frac{1}{2}\,\frac{p''u}{p'u}, \qquad \frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} = -p'u, \\ & \sigma 2u = \sigma^4 u\,\frac{d^3\operatorname{Log}\sigma u}{du^3} = 2\sigma u\,\sigma'^3 u - 3\sigma^2 u\,\sigma' u\,\sigma'' u + \sigma^3 u\,\sigma''' u. \end{aligned}\right.$$

2. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix},$$

où u, v, w sont trois variables indépendantes, a pour valeur

$$\frac{2\sigma(v-w)\sigma(w-u)\sigma(u-v)\sigma(u+v+w)}{(\sigma u\,\sigma v\,\sigma w)^3}.$$

[Pour le démontrer, remarquons que ce déterminant, considéré comme une fonction de u, est une fonction elliptique d'ordre 3 ayant le pôle triple

$u = 0$ et les points homologues. Cette fonction a manifestement les zéros v et w, car si l'on fait $u = v$ ou $u = w$ deux lignes sont identiques. Le troisième zéro de la fonction est donc homologue du point $-(v+w)$, car la somme des zéros ne diffère de la somme des infinis, qui est nulle, que par des multiples des périodes. On a donc

$$\Delta = C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(u+v+w)}{\sigma^3 u},$$

C désignant une constante indépendante de u. Pour la déterminer on multipliera par u^3 et l'on fera $u = 0$. Le produit $u^3 \Delta$ tend alors vers $2(pv - pw)$, et le second membre tend vers

$$C \sigma v \, \sigma w \, \sigma(v+w).$$

Donc

$$C = 2 \frac{pv - pw}{\sigma v \, \sigma w \, \sigma(v+w)}.$$

Décomposant alors $pv - pw$ en facteurs (n° 43) on a la valeur de C et l'on obtient la formule indiquée].

Il résulte de la formule que pour $u + v + w = 0$, le déterminant Δ est identiquement nul; la formule fournit alors une expression symétrique du théorème d'addition de la fonction pu.

Pour les formules de ce genre, on consultera Hermite, *Journal de Crelle*, t. 82, p. 343; *Œuvres*, t. III, p. 420-424 et les *Formules*... de M. Schwarz, trad. par M. Padé, p. 16-17.

3. **Fonctions σ_1, σ_2, σ_3.** — Les équations

$$(1) \qquad \sqrt{pu - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{pu - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{pu - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

définissent les trois racines carrées en fonctions uniformes de u. Si l'on donne successivement à la variable u les valeurs

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \omega + \omega' + \omega'', \qquad \omega_3 = \omega',$$

on obtient les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega}{\sigma \omega} = \dfrac{e^{\eta'' \omega} \sigma \omega'}{\sigma \omega \, \sigma \omega''}, & \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega}{\sigma \omega} = \dfrac{e^{-\eta' \omega} \sigma \omega''}{\sigma \omega \, \sigma \omega'}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega''}{\sigma \omega''} = -\dfrac{e^{\eta \omega''} \sigma \omega'}{\sigma \omega \, \sigma \omega''}, & \sqrt{e_2 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega''}{\sigma \omega''} = -\dfrac{e^{\eta' \omega''} \sigma \omega}{\sigma \omega' \, \sigma \omega''}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega'}{\sigma \omega'} = \dfrac{e^{-\eta \omega'} \sigma \omega''}{\sigma \omega \, \sigma \omega'}, & \sqrt{e_3 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega'}{\sigma \omega'} = \dfrac{e^{\eta'' \omega'} \sigma \omega}{\sigma \omega' \, \sigma \omega''}, \end{cases}$$

par lesquelles sont déterminées sans ambiguïté les valeurs des six racines carrées. Dans l'hypothèse que le coefficient de i dans $\dfrac{\omega'}{\omega}$ est positif

(*cf.* p. 28), on a, entre ces radicaux, les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{e_3-e_2} = -i\sqrt{e_2-e_3}, \\ \sqrt{e_3-e_1} = -i\sqrt{e_1-e_3}, \\ \sqrt{e_2-e_1} = -i\sqrt{e_1-e_2}. \end{cases}$$

Relations entre les carrés des fonctions σ, σ_1, σ_2, σ_3. — Les relations

$$pu - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

donnent, par l'élimination de pu, les formules

$$\begin{gathered} \sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\sigma^2 u = 0, \\ \sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma^2 u = 0, \\ \sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u = 0, \\ (e_2 - e_3)\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 u = 0. \end{gathered}$$

Différentiations des quotients de fonctions σ. — L'équation

$$(1)\qquad p'u = -2\frac{\sigma_\lambda u\,\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u}{\sigma u\,\sigma u\,\sigma u}$$

donne pour les fonctions

$$(2)\qquad \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}, \qquad \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

les équations différentielles suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{du}\dfrac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u}\dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u}, \\ \dfrac{d}{du}\dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = -(e_\mu - e_\nu)\dfrac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\nu u}\dfrac{\sigma u}{\sigma_\nu u}, \qquad \dfrac{d}{du}\dfrac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = -\dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma u}. \end{cases}$$

Exemples de décompositions en éléments simples.

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_\lambda} = \frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{d}{du}\operatorname{Log}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}, \\ \frac{1}{2}\frac{(e_\mu - e_\nu)p'u}{(pu - e_\mu)(pu - e_\nu)} = \frac{\sigma'_\mu u}{\sigma_\mu u} - \frac{\sigma'_\nu u}{\sigma_\nu u} = \frac{d}{du}\operatorname{Log}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}, \\ -\frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{pu - e_\lambda} - e_\lambda = \frac{d}{du}\frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u} = \frac{d^2}{du^2}\operatorname{Log}\sigma_\lambda u. \end{gathered}$$

On trouvera des relations analogues dans les *Formules*... de M. Schwarz (trad. par M. Padé), p. 24-29.

4. Soit $\varphi(u)$ une fonction elliptique du *second ordre* aux périodes 2ω et $2\omega'$. Si cette fonction admet, dans un parallélogramme des périodes, un seul pôle double $u=a$ avec la partie principale $\frac{A}{(u-a)^2}$, sa dérivée $\varphi'(u)$ admet dans un parallélogramme les trois zéros $\alpha=a+\omega$, $\beta=a+\omega'$, $\gamma=a+\omega+\omega'$ et l'on a

$$\frac{A}{4}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2=[\varphi(u)-\varphi(\alpha)][\varphi(u)-\varphi(\beta)][\varphi(u)-\varphi(\gamma)].$$

[Ces théorèmes se démontrent soit en exprimant $\varphi(u)$ à l'aide de pu

$$\varphi(u)=A\,p(u-a)+B,$$

soit en remarquant que

$$\varphi(2a-u)=\varphi(u),$$

d'où, en différentiant,

$$\varphi'(2a-u)=-\varphi'(u);$$

relation qui montre que $\varphi'(u)$ s'annule pour $u=\alpha$, $u=\beta$, $u=\gamma$, car elle donne, par exemple, $\varphi'(\alpha)=-\varphi'(\alpha)$.]

Si la fonction elliptique $\psi(u)$ a, dans un parallélogramme, deux pôles simples a et b, de résidus A et $-$A, $\psi'(u)$ admet dans un parallélogramme quatre zéros :

$$u_1=\frac{a+b}{2},\qquad u_2=\frac{a+b}{2}+\omega,$$

$$u_3=\frac{a+b}{2}+\omega',\qquad u_4=\frac{a+b}{2}+\omega+\omega',$$

et l'on a

$$\begin{aligned}A^2\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2= &[\psi(u)-\psi(u_1)][\psi(u)-\psi(u_2)]\\ &\times[\psi(u)-\psi(u_3)][\psi(u)-\psi(u_4)].\end{aligned}$$

[On le démontrera en établissant la relation

$$\psi(a+b-u)=\psi(u)$$

et, par différentiation,

$$\psi'(a+b-u)=-\psi'(u).]$$

5. Démontrer que l'on a, quels que soient les arguments a, b, c, d, la relation

$$\begin{aligned}&\sigma(a+b)\sigma(a-b)\sigma(c+d)\sigma(c-d)\\ &+\sigma(a+c)\sigma(a-c)\sigma(d+b)\sigma(d-b)\\ &+\sigma(a+d)\sigma(a-d)\sigma(b+c)\sigma(b-c)=0,\end{aligned}$$

désignée quelquefois sous le nom d'*équation à trois termes*. — [Elle résulte de l'identité

$$(A-B)(C-D)+(A-C)(D-B)+(A-D)(B-C)=0,$$

où l'on fait

$$A = pa, \qquad B = pb, \qquad C = pc, \qquad D = pd$$

et de la formule

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}.\Big]$$

6. Démontrer qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les fonctions

$$\sigma(u+a)\sigma(u-a), \qquad \sigma(u+b)\sigma(u-b), \qquad \sigma(u+c)\sigma(u-c).$$

[La fonction

$$\frac{P\sigma(u+b)\sigma(u-b) + Q\sigma(u+c)\sigma(u-c)}{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}$$

est une fonction doublement périodique ayant deux pôles dans un parallélogramme des périodes; on peut déterminer le rapport des constantes P et Q de façon que le numérateur s'annule pour $u = a$; P et Q étant ainsi déterminés, la fonction se réduit à une constante.

On retrouve ainsi la relation précédente.]

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES VALEURS RÉELLES DE pu LORSQUE ω EST RÉEL ET ω' PUREMENT IMAGINAIRE. APPLICATIONS.

53. Dans la théorie générale que nous venons d'exposer, les périodes 2ω et $2\omega'$ sont des constantes imaginaires quelconques, assujetties à la seule condition que leur rapport soit imaginaire. Un cas particulier des plus importants, qui se présente fréquemment dans les applications, est celui où l'une des périodes 2ω est réelle et l'autre $2\omega'$, purement imaginaire, c'est-à-dire égale au produit de i par un nombre réel. Comme on peut toujours changer le signe des périodes, on peut prendre 2ω et $\frac{2\omega'}{i}$ positifs; il en résulte que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est positif.

Pour que ces hypothèses soient réalisées, il faut et il suffit, comme nous allons le voir, que les racines e_1, e_2, e_3 soient réelles; et c'est précisément à cette circonstance qu'est due l'importance pratique de ce cas, que nous allons étudier en détail.

I. — Valeurs réelles de pu quand ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs.

54. **Les invariants g_2 et g_3 sont alors réels.** — Si l'on suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs, les invariants

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} g_2 = 2^2.3.5\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7\sum{}' \frac{1}{w^6}, \\ \qquad\qquad w = 2m\omega + 2n\omega' \end{array}\right.$$

sont réels. En effet, à toute valeur imaginaire de w correspond pour w une valeur imaginaire conjuguée, puisqu'en changeant le signe de n on change le signe du coefficient de i. Dans chacune des séries précédentes, les termes qui correspondent à deux valeurs

imaginaires conjuguées de w ont une somme réelle : on en conclut que g_2 et g_3 *sont réels*.

55. **Valeurs réelles de l'argument.** — En raisonnant de même pour chacune des séries

$$pu - \frac{1}{u^2} = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \qquad p'u = -2\sum \frac{1}{(u-w)^3},$$

où l'on suppose u réel, on reconnaît que *pu et $p'u$ sont réelles quand l'argument u est réel.*

Les valeurs de u qui rendent la dérivée nulle ou infinie sont de la forme

$$m_1\omega + n_1\omega',$$

m_1 et n_1 étant des nombres entiers.

1° Lorsque u croît de o à ω par valeurs réelles, $p'u$ varie d'une manière continue et ne change pas de signe; pour u positif et très petit, $p'u$ est très grande, en valeur absolue, et négative puisque sa partie principale est

$$-\frac{2}{u^3};$$

pour $u = \omega$, $p'u$ s'annule.

Donc, quand u croît de o à ω, la dérivée est constamment négative, et elle passe par toute valeur négative; la fonction pu décroît constamment depuis $+\infty$ jusqu'à $p\omega = e_1$. Cette valeur e_1 est réelle.

L'équation

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3$$

montre alors que u croissant de o à ω, c'est-à-dire pu décroissant de $+\infty$ à e_1, le polynome $4p^3u - g_2pu - g_3$ ne s'annule que pour $u = \omega$, c'est-à-dire pour $pu = e_1$. Le polynome $4x^3 - g_2x - g_3$ n'a donc pas de racine réelle supérieure à e_1 : la plus grande racine de ce polynome est la valeur que prend pu, quand u égale la demi-période réelle.

L'argument u variant toujours de o à ω, $p'u$ est négatif, et l'on a, en extrayant la racine,

$$p'u = -\sqrt{4p^3u - g_2pu - g_3}$$

ou, en posant $x = pu$,

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Comme x décroît de $+\infty$ à e_1, quand u croît de o à ω, on a, en intégrant par rapport à u de o à ω et par rapport à x de $+\infty$ à e_1, par valeurs réelles,

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

2° Supposons maintenant que u est réel, mais n'est plus compris entre o et ω. Les égalités

$$p(-u) = pu, \quad p'(-u) = -p'u$$

montrent d'abord que, quand u varie entre $-\omega$ et o, pu est réelle et plus grande que e_1, $p'u$ est positive et prend toutes les valeurs positives.

Or, on peut toujours ramener un argument réel à être compris entre $-\omega$ et ω, en retranchant de cet argument un multiple de la période 2ω; les résultats précédents s'énoncent ainsi :

Quand l'argument u est réel, la fonction pu et sa dérivée $p'u$ sont réelles. La valeur de pu est plus grande que e_1 et le signe de $p'u$ est celui de $(-1)^{m+1}$, si l'on a

$$m\omega < u < (m+1)\omega,$$

m étant un nombre entier.

56. **Argument purement imaginaire.** — Quand l'argument u est purement imaginaire, la fonction pu est *réelle* et $p'u$, *purement imaginaire*. C'est ce qu'on voit immédiatement en se reportant aux séries. En effet, si l'on fait $u = iv$, en supposant v réel, la série pu donne

$$p(iv \mid \omega, \omega') = -\frac{1}{v^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(iv + w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$
$$= -\frac{1}{v^2} - \sum{}' \left[\frac{1}{(v + iw)^2} - \frac{1}{(iw)^2} \right].$$

Dans cette dernière série, $iw = 2mi\omega + 2m'i\omega'$; elle définit donc, au signe près, la fonction pv construite avec les périodes

$i\omega'$ et $i\omega$, ou avec les périodes $-i\omega'$ et $i\omega$, car on peut changer le signe d'une des périodes. On a donc

$$(2)\qquad p(iv\,|\,\omega, \omega') = -p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right).$$

La fonction $p(iv\,|\,\omega, \omega')$, où l'argument est purement imaginaire, est ainsi ramenée à une autre fonction p à argument réel v, construite avec les périodes $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$ dont la première est encore *réelle* et la seconde *purement imaginaire* avec un coefficient de i positif. Donc, quand u est purement imaginaire, pu est *réelle*.

Cette formule (2) est un cas particulier des formules d'homogénéité établies au nº 36 : on l'obtiendrait en prenant $\mu = i$.

Les nouveaux invariants relatifs aux nouvelles périodes $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$ se déduisent des expressions (1) en y remplaçant w par iw; ils sont donc égaux à g_2 et à $-g_3$. On peut donc écrire aussi

$$(3)\qquad p(iv; g_2, g_3) = -p(v; g_2, -g_3).$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à v dans les relations (2) et (3), on a

$$p'(iv\,|\,\omega, \omega') = ip'\left(v \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right),$$
$$p'(iv; g_2, g_3) = ip'(v; g_2, -g_3).$$

Donc, quand u est purement imaginaire, $p'u$ est *purement imaginaire*.

La fonction $y = p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, \omega\right) = p(v; g_2, -g_3)$ vérifie l'équation

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = p'^2 v = 4y^3 - g_2 y + g_3;$$

le polynome en y qui est dans le second membre admet pour racines $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$. D'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, quand v varie par valeurs réelles de o à la demi-période réelle $\frac{\omega'}{i}$, la nouvelle fonction pu décroît constamment par valeurs réelles de $+\infty$ à $p\left(\frac{\omega'}{i} \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right)$ qui est la plus grande racine $-e_3$ du polynome $4y^3 - g_2 y + g_3$; e_3 est donc réel, et

l'on a de plus

$$(4)\qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y + g_3}}.$$

Donc, quand $u = iv$ varie par valeurs purement imaginaires de o à ω', la fonction $x = p(u|\omega, \omega')$, qui est égale à $-p\left(v \middle| \frac{\omega'}{i}, i\omega\right)$, *croît constamment* par valeurs réelles de $-\infty$ à $p(\omega'|\omega, \omega')$, c'est-à-dire de $-\infty$ à la plus petite racine e_3 du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$.

D'une façon générale, en appliquant à la fonction $p\left(v \middle| \frac{\omega'}{i}, \omega\right)$ et à sa dérivée ce que nous avons vu dans le numéro précédent, pour un argument réel, on a le résultat suivant :

Quand l'argument u est purement imaginaire, la fonction pu est réelle et $p'u$ est purement imaginaire; la valeur de la fonction pu est négative et toujours inférieure à e_3; $\frac{1}{i}p'u$ a le signe de $(-1)^{m+1}$ si l'on a

$$m\frac{\omega'}{i} < \frac{u}{i} < (m+1)\frac{\omega'}{i},$$

m étant un nombre entier.

57. **Racines e_1, e_2, e_3.** — Parmi les racines du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$, la plus grande et la plus petite sont donc

$$e_1 = p(\omega|\omega, \omega'), \qquad e_3 = p(\omega'|\omega, \omega').$$

Ces deux racines étant réelles, et les invariants g_2 et g_3 étant réels, la troisième racine e_2 est réelle aussi : elle est comprise entre les deux précédentes et a pour valeurs

$$e_2 = p(\omega + \omega'|\omega, \omega').$$

Ainsi, en désignant, comme nous l'avons fait, par e_1, e_2, e_3 les racines qui correspondent aux demi-périodes ω, $\omega + \omega'$, ω', on a

$$e_1 > e_2 > e_3$$

et le discriminant Δ (nº 46) est alors positif.

58. **Autres valeurs de u rendant pu réelle.** — Nous trouverons

d'autres valeurs de l'argument faisant prendre à la fonction des valeurs réelles en considérant les développements de $p(u+\omega')$ et de $p(u+\omega)$.

1° *Argument $u+\omega'$, u étant réel.* — D'après la définition même de pu, on a

$$p(u+\omega')-p\omega' = \sum \left[\frac{1}{(u-\mu\omega-\nu\omega')^2} - \frac{1}{(\mu\omega+\nu\omega')^2} \right],$$

$$\mu = 0, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \ldots,$$
$$\nu = \pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \quad \ldots.$$

Lorsque u est réel, si l'on change ν en $-\nu$ dans un terme imaginaire de la série, on obtient un autre terme imaginaire conjugué du précédent et la somme de ces deux termes est réelle. Donc $p(u+\omega')$ est réelle quand u est réel. On voit, de même, que la dérivée

$$p'(u+\omega') = -2\sum \frac{1}{(u-\mu\omega-\nu\omega')^3}$$

est réelle.

Quand u croît par valeurs réelles de 0 à ω, $u+\omega'$ varie de ω' à $\omega+\omega'$ et $p'(u+\omega')$ ne devient ni nulle, ni infinie, sauf pour les valeurs extrêmes qui annulent toutes deux $p'(u+\omega')$. Ainsi $p'(u+\omega')$ garde un signe constant : $p(u+\omega')$ varie toujours dans le même sens. Or, la valeur de cette fonction pour $u=0$ est e_3; pour $u=\omega$, elle est $e_2 > e_3$. Donc $p(u+\omega')$ croît constamment de e_3 à e_2.

D'après cela, le signe constant de la dérivée est le signe $+$. Comme cette dérivée part de zéro pour revenir à zéro et reste finie, elle a un maximum.

Ainsi, quand u croît de 0 à ω, $p(u+\omega')$ est réelle et croît de e_3 à e_2; la dérivée $p'(u+\omega')$ est réelle, positive et inférieure à un certain maximum.

On en conclut une seconde expression de la période réelle 2ω. En effet, en faisant

$$p(u+\omega') = x,$$

on a

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

et quand u varie de o à ω, x varie de e_3 à e_2 par valeurs réelles; on a donc, en intégrant par rapport à u de o à ω, et par rapport à x de e_3 à e_2,

$$\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

2° *Argument $it - \omega$, t étant réel.* — Considérons enfin un argument de la forme $-\omega + it$, t étant réel. Dans la formule

$$p(iv \mid \omega, \omega') = -p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right),$$

faisons $iv = -\omega + it$,

$$p(-\omega + it \mid \omega, \omega') = -p\left(t + i\omega \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right);$$

la fonction qui est dans le second membre rentre, à un changement de notation près, dans le cas précédent.

Quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, cette fonction varie constamment dans le même sens : il en est de même de la fonction $p(-\omega + it \mid \omega, \omega')$; or, cette fonction part de e_1 pour arriver à e_2; elle décroît donc constamment. Sa dérivée prise par rapport à t, $ip'(-\omega + it \mid \omega, \omega')$ est négative, et, comme elle part de zéro pour arriver à zéro, elle reste supérieure à un certain minimum.

Ainsi, quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, $p(-\omega + it)$ décroît de e_1 à e_2; $ip'(-\omega + it)$ est négative et reste supérieure à un certain minimum.

Comme

$$p(\omega + it \mid \omega, \omega') = p(-\omega + it \mid \omega, \omega'),$$

le même résultat s'applique aux fonctions

$$p(\omega + it) \quad \text{et} \quad ip'(\omega + it).$$

Remarque. — Nous venons de trouver des valeurs de u pour lesquelles la valeur de la fonction pu est réelle et nous avons déjà reconnu que, dans le cas actuel où les quantités ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réelles, la fonction pu peut prendre une valeur réelle quelconque.

Les autres valeurs de l'argument, pour lesquelles la fonction

prend des valeurs réelles, peuvent se déduire des précédentes; il suffit de remarquer que l'équation

$$pu - pv = 0$$

entraîne (nº 43)

$$u = \pm v,$$

à des multiples près des périodes.

59. **Résumé.** — Considérons le rectangle de sommets o, ω, $\omega + \omega'$, ω'. Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens o, ω, $\omega + \omega'$, ω', o, la fonction pu est réelle et diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1º Quand u va de o au sommet ω, pu est réelle et décroît de $+\infty$ à e_1; $p'u$ est négative.

2º Quand u va de ω à ω', pu décroît de e_1 à e_2; $p'u$ est purement imaginaire positive.

3º La variable u allant de $\omega + \omega'$ à ω', pu décroît de e_2 à e_3; $p'u$ est réelle et positive.

4º Enfin u revenant de ω' à o, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle pu est imaginaire.

II. — Étude de la cubique définie par les équations $x = pu$, $y = p'u$. Lemniscate.

60. **Cas général.** — Considérons la cubique ayant pour équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{1}$$

où g_2 et g_3 désignent des constantes données quelconques. On démontre, en Géométrie analytique, que l'on peut, par une projection centrale ou perspective, ramener l'équation de toute courbe du troisième ordre à cette forme.

Construisons la fonction $p(u; g_2, g_3)$ (*cf.* nº 34); nous pourrons exprimer les coordonnées d'un point de la courbe (1) en fonction d'un paramètre u, en posant

$$x = pu, \quad y = p'u. \tag{2}$$

A chaque valeur de u répond alors un point (réel ou imaginaire) de la courbe, car les fonctions p et p' sont uniformes : ce point reste le même quand on ajoute à u des multiples des périodes 2ω et $2\omega'$. Réciproquement, à chaque point (x, y) de la courbe répond, dans un parallélogramme des périodes, *une seule valeur* de u. En effet, x étant donné seul, l'équation

$$x = pu$$

donne, pour u, deux valeurs u_1 et $-u_1$ et toutes les valeurs homologues : comme la fonction $p'u$ est impaire, à ces deux systèmes de valeurs de u, correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires ; ce sont les deux valeurs que l'on tirerait de l'équation (1). Si l'on fait choix d'une de ces valeurs de y, il lui correspond donc une seule valeur de u, u_1 par exemple, et les valeurs homologues. La proposition est établie.

On a ainsi une représentation paramétrique parfaite de la courbe.

61. Condition pour que trois points soient en ligne droite. — Soient M_1, M_2, M_3 les trois points où une droite quelconque

$$y - ax - b = 0$$

coupe la courbe. Les valeurs u_1, u_2, u_3, situées dans un parallélogramme élémentaire et correspondant à ces trois points, sont racines de l'équation

$$p'u - apu - b = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction elliptique d'ordre 3 : elle a, dans un parallélogramme élémentaire, trois zéros u_1, u_2, u_3 et un infini triple homologue du point $u = 0$; d'après le théorème de Liouville, on a donc

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2n\omega + 2n'\omega', \tag{3}$$

n et n' étant des entiers.

Cette condition, qui est nécessaire pour que les trois points correspondant à u_1, u_2, u_3 soient en ligne droite, est *suffisante*. En effet, soient M_1, M_2, M_3 les trois points correspondant aux trois valeurs u_1, u_2, u_3. Joignons les deux premiers par une droite

et appelons M'_3 le point où cette droite coupe la cubique et u'_3 le paramètre correspondant. Les trois points M_1, M_2, M'_3 étant en ligne droite, on a

$$u_1 + u_2 + u'_3 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

m et m' entiers. En comparant à la relation (3) supposée vérifiée, on voit que u'_3 ne diffère de u_3 que par des multiples des périodes; donc M'_3 coïncide avec M_3 et les trois points considérés sont en ligne droite.

62. Formule d'addition. — La relation (3) permet de retrouver la formule d'addition de pu. Si l'on appelle u et v les paramètres de deux points de la courbe, le point en ligne droite avec les deux premiers correspond à la valeur $-(u+v)$ du paramètre.

D'après cela, les abscisses des trois points d'intersection de la cubique avec une droite peuvent être représentées par

$$pv, \quad pu, \quad p(u+v);$$

et les ordonnées par

$$p'v, \quad p'u, \quad -p'(u+v).$$

L'équation aux x des points d'intersection est

$$F(x) \equiv 4x^3 - g_2x - g_3 - (ax+b)^2 = 0.$$

On voit d'abord que la somme des racines est $\frac{a^2}{4}$, ce qui donne la relation

$$pu + pv + p(u+v) = \frac{a^2}{4},$$

à laquelle il faut joindre l'une des suivantes

$$a = \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{-p'(u+v) - p'v}{p(u+v) - pv} = \frac{-p'(u+v) - p'u}{p(u+v) - pu},$$

obtenues en déterminant le coefficient angulaire de la droite au moyen des coordonnées de deux de ses points.

En éliminant a, on trouve le théorème d'addition

$$pu + pv + p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

On peut déduire de la même équation $F(x) = 0$ une autre for-

mule d'addition donnant une expression du produit

$$(\wp u - \wp v)[\wp(u+v) - \wp v],$$

qui est très souvent utile. Posons

$$x_1 = \wp v, \qquad x_2 = \wp u, \qquad x_3 = \wp(u +$$

nous aurons l'identité

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax+b)^2 \equiv 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Prenons les dérivées des deux membres, puis faisons $x = x_1$, nous trouverons

$$12x_1^2 - g_2 - 2a(ax_1 + b) = 4(x_2 - x_1)(x_3 - x_1),$$

ou, en introduisant les valeurs de la fonction $\wp$ et se rappelant que $\wp'' v = 6\wp^2 v - \frac{1}{2} g_2$,

$$2(\wp u - \wp v)[\wp(u+v) - \wp v] = \wp'' v - a\wp' v,$$

$$a = \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

En particulier, si $a = 0$, on a l'égalité

$$\wp'' v = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1),$$

qui donne une interprétation géométrique de la dérivée seconde $\wp'' v$ et permet de trouver son signe quand elle est réelle.

Addition d'une demi-période. — Ces considérations donnent une signification géométrique simple aux formules d'addition d'une demi-période établies dans le n° 47. On les obtient en coupant la courbe par une sécante passant par un des points où elle rencontre l'axe Ox. Ces points A_1, A_2, A_3 ont pour coordonnées $y = 0$, avec

$$x = e_1, \qquad x = e_2, \qquad x = e_3,$$

Ils correspondent aux valeurs ω, $\omega + \omega'$, ω' de l'argument u.

Si donc on coupe par une sécante joignant le point

$$A_1(y = 0,\ x = e_1)$$

correspondant à la valeur ω du paramètre, à un point M' de la

courbe correspondant à la valeur u du paramètre, cette sécante coupe la courbe en un troisième point M″ correspondant à une valeur u'' telle que

$$\omega + u + u'' = 2n\omega + 2n'\omega',$$

et, en négligeant des multiples de périodes, on peut prendre $u'' = -(u+\omega)$. Ainsi les abscisses des points M′ et M″ sont

$$x' = pu, \qquad x'' = p(u+\omega).$$

D'autre part, en coupant la courbe

$$y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

par une sécante issue du point A_1

$$y = m(x-e_1),$$

on a, pour déterminer les abscisses x' et x'', l'équation

$$m^2(x-e_1) = 4(x-e_2)(x-e_3).$$

Si dans cette équation on considère $x - e_1$ comme l'inconnue, le produit des racines $(x'-e_1)(x''-e_1)$ a pour valeur

$$(x'-e_1)(x''-e_1) = (e_1-e_2)(e_1-e_3).$$

On a donc, d'après les valeurs de x' et x'',

$$[pu-e_1][p(u+\omega)-e_1] = (e_1-e_2)(e_1-e_3),$$

ce qui est une des formules établies dans le n° 47. On obtiendrait de même les deux autres en coupant par une sécante passant par l'un des points A_2 ou A_3.

Transformations birationnelles de la cubique (1) *en elle-même.* — Signalons encore une conséquence géométrique importante de la formule d'addition. Soient (x_0, y_0), (x, y) et (x_1, y_1) les coordonnées des points de la cubique (1) correspondant respectivement aux arguments a, u, $u+a$. D'après la formule d'addition, x_1 et y_1 sont des fonctions rationnelles de x et y dont les coefficients dépendent eux-mêmes rationnellement de x_0 et y_0, soit

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = R(x, y;\, x_0, y_0), \\ y_1 = S(x, y;\, x_0, y_0). \end{cases}$$

En écrivant $u=(u+a)+(-a)$, on voit, de même, que x et y sont des fonctions rationnelles de x_1 et y_1, dont la forme est évidemment

$$
(5) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}(x_1, y_1; x_0, -y_0), \\ y = \mathrm{S}(x_1, y_1; x_0, -y_0). \end{cases}
$$

Ceci posé, maintenons fixe le point (x_0, y_0) : quand le point (x, y) décrira la cubique (1), le point (x_1, y_1) défini par (4) décrira manifestement la même courbe; inversement, si (x_1, y_1) décrit (1), le point (x, y) défini par (5) décrit encore la même courbe. On dit que les formules (4) et (5) définissent une *transformation birationnelle* de la cubique (1) en elle-même et l'on démontre que, sauf pour des valeurs exceptionnelles du rapport $g_2^3 : g_3^2$, toute transformation birationnelle de la cubique (1) en elle-même est définie par l'une des formules

$$u_1 = \pm u + a$$

(*cf.* Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris 1895, p. 295 et 474).

63. Tangentes menées d'un point de la courbe. — Menons la tangente à la courbe au point dont le paramètre est u, cette tangente rencontre encore la courbe en un point; soit v le paramètre de ce point. On a, d'après la condition qui exprime que trois points sont en ligne droite,

$$v + 2u = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

On en déduit

$$u = -\frac{v}{2} + \frac{2n\omega + 2n'\omega'}{2}.$$

Dans cette formule, on peut donner à n et n' toutes les valeurs entières; mais deux valeurs de u qui diffèrent par des multiples de 2ω et $2\omega'$ donnent le même point de la courbe; il suffit donc de donner à n et n' les valeurs 0 et 1 associées de toutes les manières possibles. On a ainsi les quatre valeurs de u :

$$-\frac{v}{2}, \quad -\frac{v}{2}+\omega, \quad -\frac{v}{2}+\omega', \quad -\frac{v}{2}+\omega+\omega'.$$

Donc, par un point pris sur la courbe, on peut lui mener, en général, quatre tangentes distinctes de la tangente au point considéré.

Points d'inflexion. — Comme autre application, cherchons les points d'inflexion. Si u est le paramètre d'un point d'inflexion, la tangente d'inflexion coupe la courbe en trois points confondus avec celui-là; il faudra donc faire dans (1), à des multiples près des périodes,

$$u_1 = u_2 = u_3 = u;$$

d'où

$$u = \frac{2n\omega + 2n'\omega'}{3}.$$

Dans cette formule, on peut donner à n et n' toutes les valeurs entières; mais deux valeurs de u qui diffèrent par des multiples de 2ω et $2\omega'$ donnent le même point d'inflexion. Il suffit donc de donner à n et n' les valeurs 0, 1 et 2 associées de toutes les manières possibles. On trouve ainsi *neuf* points d'inflexion dont les paramètres sont donnés par le Tableau suivant, où $u_{n,n'}$ désigne la valeur de u correspondant à un choix déterminé des entiers n et n':

$$u_{0,0} = 0, \qquad u_{0,1} = \frac{2\omega'}{3}, \qquad u_{0,2} = \frac{4\omega'}{3},$$

$$u_{1,0} = \frac{2\omega}{3}, \qquad u_{1,1} = \frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \qquad u_{1,2} = \frac{2\omega + 4\omega'}{3},$$

$$u_{2,0} = \frac{4\omega}{3}, \qquad u_{2,1} = \frac{4\omega + 2\omega'}{3}, \qquad u_{2,2} = \frac{4\omega + 4\omega'}{3}.$$

Ces points sont trois à trois en ligne droite; la droite, qui joint deux quelconques d'entre eux, passe par un troisième; on a, par exemple,

$$u_{0,0} + u_{1,1} + u_{2,2} = 2\omega + 2\omega'.$$

Le premier point $u_{0,0}$ est rejeté à l'infini dans la direction de Oy.

64. Condition pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe d'ordre n. — Cherchons d'abord la condition pour que six points de la cubique soient sur une conique.

Si l'on coupe la cubique par une conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation qui détermine les paramètres des points d'intersection s'obtient en remplaçant x et y par pu et par $p'u$. Le premier

membre de cette équation est une fonction doublement périodique qui, dans un parallélogramme élémentaire comprenant l'origine, admet zéro comme pôle d'ordre 6 et n'admet pas d'autre pôle; l'équation possède donc six racines (nos 38 et 39) et la somme de ces racines est nulle, à des multiples près des périodes.

Ainsi la condition nécessaire pour que six points de la cubique soient sur une conique est que les paramètres de ces six points vérifient l'égalité

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

La condition est suffisante, car si elle est remplie, la conique, passant par les cinq premiers points, coupe la cubique en un sixième point dont le paramètre u'_6 est congru à u_6.

On obtiendrait, de même, la condition pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe d'ordre n. Cette condition est

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv 0,$$

où, comme dans tout ce qui suit, le signe $\equiv$ indique que l'égalité a lieu *à des multiples de périodes près*.

Par exemple, une autre cubique coupe la cubique donnée en neuf points qui doivent être assujettis à une condition, puisque, par neuf points donnés, il ne passe, en général, qu'une seule cubique. Le théorème précédent exprime cette condition de la façon la plus simple.

Ce théorème a de très nombreuses applications géométriques, nous en donnerons seulement quelques exemples.

Applications. — 1° Lorsque six des neuf points d'intersection de deux cubiques appartiennent à une même conique, les trois autres points sont en ligne droite.

En effet, soient $u_1, u_2, \ldots, u_9$ les paramètres des neuf points suivant lesquels la cubique donnée est coupée par une autre cubique, on a la condition

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 + \ldots + u_9 \equiv 0.$$

Supposons que les six premiers points appartiennent à une même conique, on aura cette autre condition

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \equiv 0,$$

et l'on déduit de ces deux conditions l'égalité

$$u_7 + u_8 + u_9 \equiv 0,$$

qui exprime bien que les trois derniers points sont en ligne droite. Le théorème est donc démontré.

2° Si l'on considère une conique variable passant par quatre points fixes pris sur une cubique, la droite qui joint les deux points d'intersection mobiles passe par un point fixe de la cubique.

Soient u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 les paramètres des six points d'intersection, les quatre premiers se rapportant aux points fixes. Posons

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = v;$$

v est une constante. La relation qui exprime que les six points considérés de la cubique sont sur une conique devient

$$v + u_5 + u_6 \equiv 0;$$

elle exprime que les points dont les paramètres sont u_5, u_6 et v sont en ligne droite. Comme v est le paramètre d'un point fixe, la proposition se trouve démontrée.

Courbes de contact. — Les applications suivantes sont relatives à des courbes de contact, c'est-à-dire à des courbes qui ont avec la cubique plusieurs points d'intersection confondus.

3° Considérons d'abord des coniques trois fois tangentes à la cubique; si l'on désigne les paramètres des points de contact par u_1, u_2, u_3 on doit avoir

$$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 2n\omega + 2n'\omega',$$

ou bien

$$u_1 + u_2 + u_3 = n\omega + n'\omega';$$

il suffit de donner à chacun des nombres entiers n et n' les valeurs de 0 et 1.

Si l'on prend

$$n = 0, \qquad n' = 0,$$

l'égalité exprime que les trois points sont en ligne droite. C'est le cas où la conique se réduit à une droite double; écartons ce cas;

il reste trois familles de coniques correspondant aux relations

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \omega,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \omega'.$$
$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \omega + \omega'.$$

On peut donc choisir arbitrairement deux des points de contact pour chaque conique d'une famille. Prenons une conique, de la première famille par exemple; si l'on fait passer une conique par les trois points de contact u_1, u_2, u_3, elle rencontrera encore la cubique en trois points u'_1, u'_2, u'_3 et l'on aura

$$u_1 + u_2 + u_3 + u'_1 + u'_2 + u'_3 = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

De cette relation et de la condition déjà vérifiée par u_1, u_2, u_3, on déduit

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 \equiv \omega,$$

et l'on voit que les trois nouveaux points sont aussi les points de contact d'une conique trois fois tangente à la cubique appartenant à la même famille.

4° Cherchons encore les points de la cubique où la conique osculatrice a un contact du cinquième ordre, ou, ce qui revient au même, les coniques qui rencontrent la cubique en six points confondus.

On doit avoir pour le paramètre du point de contact

$$6u = 2n\omega + 2n'\omega'$$

ou bien

$$u = \frac{n}{6}2\omega + \frac{n'}{6}2\omega'.$$

Chacun des nombres entiers n et n' peut prendre toutes les valeurs de o à 5, ce qui donne $6^2 = 36$ points.

On trouve parmi ces points les neuf points d'inflexion qu'on obtient en considérant les tangentes d'inflexion comme des droites doubles, puis

$$6^2 - 3^2 = 27$$

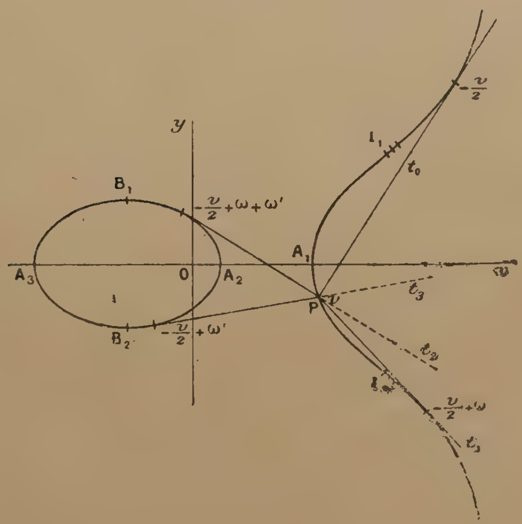
points de contact de véritables coniques surosculatrices. Ces points (appelés *points sextactiques*) sont six par six sur des coniques.

65. Cas particulier où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels. Forme de la courbe. Nature de l'argument donnant des points réels. — Nous allons maintenant examiner le cas particulier où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, de façon à avoir une représentation géométrique des résultats du paragraphe précédent. Dans ce cas, la courbe a pour équation

$$y^2 = 4x^2 - g_2x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

où e_1, e_2, e_3 sont réels et rangés par ordre de grandeur décroissante. Pour que y soit réel il faut que x soit compris entre e_3

Fig. 5.



et e_2 ou plus grand que e_1. On voit immédiatement que la courbe est formée d'un ovale A_3A_2 et d'une branche infinie A_1 de nature parabolique, sur laquelle la tangente tend à devenir parallèle à Oy (*fig.* 5).

Cherchons quelles valeurs il faut donner à u pour obtenir les points réels de la courbe. D'abord, pour obtenir les points de la branche infinie, il faut donner à u des valeurs faisant varier x de e_1 à $+\infty$, c'est-à-dire des valeurs réelles. Puis, pour obtenir les points de l'ovale, il faut donner à u des valeurs faisant varier x de e_3 à e_2, c'est-à-dire des valeurs de la forme $u+\omega'$, u étant réel.

On peut facilement suivre sur la courbe la marche du point (x, y) quand l'argument prend ces deux systèmes de valeurs.

Supposons d'abord u réel; il suffit, à cause de la périodicité, de le faire varier de $-\omega$ à $+\omega$, en remarquant que des valeurs de u égales et de signes contraires donnent des points de la courbe symétriques par rapport à Ox. Quand u croît de 0 à ω, x décroît de $+\infty$ à e_1, y croît de $-\infty$ à 0 : on a donc la branche infinie de courbe située au-dessous de Ox et venant aboutir au point A_1 dont les coordonnées sont e_1 et 0. Au point A_1 la tangente est parallèle à Oy puisque $\frac{dx}{du} = p'u$ s'annule pour $u = \omega$ et que $\frac{dy}{du}$ ne s'annule pas pour cette valeur. Quand u varie de 0 à $-\omega$, on obtient la branche de courbe symétrique de la précédente par rapport à Ox. Nous avons ainsi construit la partie de la courbe donnée par des valeurs réelles de l'argument.

Supposons maintenant l'argument de la forme $u + \omega'$ et faisons varier u, par valeurs réelles, de 0 à ω; x croît de e_3 à e_2; y est positif, varie d'une manière continue et part de zéro pour revenir à zéro. On a donc la branche de courbe située au-dessus de Ox et allant du point $A_3\,(e_3, 0)$ au point $A_2\,(e_2, 0)$; les tangentes en A_3 et A_2 sont parallèles à Oy. L'argument étant toujours de la forme $u + \omega'$, en faisant varier u par valeurs réelles de 0 à $-\omega$, on obtient le deuxième arc de l'ovale symétrique du premier par rapport à Ox. Nous avons ainsi construit la partie de la courbe (ovale) correspondant aux valeurs de la forme $u + \omega'$, u réel.

Tangentes parallèles à Ox. Signe de $p''u$. — Comme on a $y = p'u$, les valeurs de u correspondant aux points où la tangente est parallèle à Ox sont racines de l'équation $\frac{dy}{du} = 0$ ou $p''u = 0$. La fonction $p''u$, qui est paire et d'ordre 4, a, dans un parallélogramme, quatre zéros deux à deux égaux et de signes contraires. Il y a donc sur la courbe quatre points où la tangente est parallèle à Ox. Deux points, les points B_1 et B_2, sont seuls réels : en effet, les abscisses de ces points sont racines de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ ou, d'après l'équation de la courbe, $12x^2 - g_2 = 0$. Cette équation, dont le premier membre est la dérivée du polynome $4x^3 - g_2x - g_3$, a une racine α entre e_1 et e_2 et une autre β entre e_2 et e_3; cette dernière seule donne des points réels B_1 et B_2.

L'identité $2 p'' u = 12 p^2 u - g_2 = 12 x^2 - g_2$ donne le signe de $p'' u$. Sur la branche infinie, $x > \alpha$, $p'' u$ est positif. Pour l'ovale, sur l'arc $B_1 A_2 B_2$, $p'' u$ est négatif, car x est alors compris entre les deux racines α et β de $12 x^2 - g_2$; sur l'arc $B_1 A_3 B_2$, $p'' u$ est positif, car x est inférieur à β.

Tangentes menées par un point de paramètre v. — Nous avons vu que les quatre points de contact correspondent aux valeurs du paramètre

$$-\frac{v}{2}, \quad -\frac{v}{2} + \omega, \quad -\frac{v}{2} + \omega', \quad -\frac{v}{2} + \omega + \omega'.$$

On peut donc, par un point P pris sur la courbe, mener quatre tangentes, en général distinctes de la tangente au point considéré.

Lorsque v est réel, pour deux des points de contact l'argument est réel; pour les deux autres il est de la forme $\omega' + u_1$, u_1 étant réel. Donc, lorsque le point P est pris sur la branche infinie, les quatre tangentes sont réelles : deux des points de contact sont sur l'ovale et les deux autres sur la branche infinie. Lorsque v est de la forme $\omega' + v_1$, v_1 étant réel, on a

$$\frac{v}{2} = \frac{\omega'}{2} + \frac{v_1}{2}.$$

Les arguments des points de contact ne sont ni réels, ni de la forme $\omega' + u_1$, u_1 étant réel (à des périodes près). Par un point P pris sur l'ovale on ne peut pas mener à la courbe une tangente réelle.

Points d'inflexion. — Nous avons trouvé plus haut neuf valeurs du paramètre donnant les neuf points d'inflexion. Dans le cas particulier que nous examinons ici, trois de ces valeurs seulement

$$0, \quad \frac{2\omega}{3}, \quad \frac{4\omega}{3}$$

sont réelles; elles donnent trois points d'inflexion réels situés sur la branche infinie, le premier à l'infini, les deux autres aux points I_1 et I_2 symétriques par rapport à Ox. Ces trois points sont en ligne droite.

66. Dégénérescence. Cas d'un point double. — Supposons le discriminant $g_2^3 - 27\, g_3^2$ *nul*. La cubique a alors un point double. Une des périodes $2\omega'$ est infinie (nos 23, 37 et 47) et pu se réduit à

$$x = p(u \mid \omega, \infty) = -\frac{\pi^2}{12\,\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\,\omega^2}\,\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi u}{2\,\omega}};$$

d'où

$$y = p'(u \mid \omega, \infty) = -\frac{\pi^3}{4\,\omega^3}\,\frac{\cos\dfrac{\pi u}{2\,\omega}}{\sin^3 \dfrac{\pi u}{2\,\omega}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les trois points correspondant aux valeurs u_1, u_2, u_3 du paramètre soient en ligne droite est alors

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2\,n\,\omega,$$

où n est un entier. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet, les valeurs de u correspondant aux trois points d'intersection de la cubique avec la droite $Ax + By + C = 0$ sont alors racines de l'équation

$$A\,pu + B\,p'u + C = 0$$

ou, en désignant par a, b, c d'autres constantes,

$$a\,\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi u}{2\,\omega}} + b\,\frac{\cos\dfrac{\pi u}{2\,\omega}}{\sin^3 \dfrac{\pi u}{2\,\omega}} + c = 0,$$

équation du troisième degré en

$$t = \cot\frac{\pi u}{2\,\omega},$$

$$a(1 + t^2) + b\,t(1 + t^2) + c = 0.$$

La somme des produits des racines deux à deux étant 1, on a, d'après la formule donnant la cotangente d'une somme,

$$\cot\frac{\pi}{2\,\omega}(u_1 + u_2 + u_3) = \infty,$$

d'où

$$\frac{\pi}{2\,\omega}(u_1 + u_2 + u_3) = n\pi,$$

ce qui est bien la relation indiquée. Actuellement il n'y a plus que trois points d'inflexion; car en faisant $u_1 = u_2 = u_3 = u$, on a

$$3u = 2n\omega,$$

d'où trois valeurs donnant des points distincts

$$u' = 0, \qquad u'' = \frac{2\omega}{3}, \qquad u''' = \frac{4\omega}{3}.$$

Ces points sont en ligne droite, car

$$u' + u'' + u''' = 2\omega.$$

Cas d'un point de rebroussement. — Si $g_2 = g_3 = 0$, la cubique devient

$$y^2 = 4x^3;$$

elle a un rebroussement. Comme on a $\Delta = 0 = g_2$, il résulte des nos 47 et 37 que les deux périodes ω et ω' sont infinies; et l'on a (no 23) :

$$x = pu = \frac{1}{u^2}, \qquad y = p'u = -\frac{2}{u^3}.$$

Les trois valeurs de u correspondant à trois points en ligne droite vérifient alors la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0;$$

en effet, elles sont racines d'une équation de la forme

$$\frac{2}{u^3} + \frac{a}{u^2} + b = 0,$$

qui, rendue entière, ne contient pas de terme en u^2.

Il n'y a plus qu'un point d'inflexion, car en faisant

$$u_1 = u_2 = u_3 = u,$$

on a

$$3u = 0.$$

Ce point d'inflexion est d'ailleurs rejeté à l'infini.

67. Rectification de la lemniscate. — Soit une lemniscate ayant pour équation en coordonnées polaires

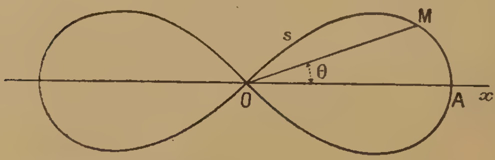
$$r^2 = 2\cos 2\theta.$$

L'arc OM $= s$ (*fig.* 6), compté à partir du point double où r est nul, est donné par les formules

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}},$$

$$s = \int_0^r \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}}.$$

Fig. 6.



Faisons le changement de variable

$$r = \sqrt{\frac{1}{z}},$$

il vient

$$s = -\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}},$$

on a donc une intégrale de la forme

$$\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

avec $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. On en conclut

$$z = p(s;\,1,\,0) = \frac{1}{r^2}.$$

On a ainsi une représentation géométrique de la fonction $p(s;\,1,\,0)$ pour les valeurs réelles de l'argument.

Actuellement, les racines e_1, e_2, e_3 sont $\frac{1}{2}$, 0 et $-\frac{1}{2}$. Les expressions

$$\sqrt{z - \frac{1}{2}}, \quad \sqrt{z}, \quad \sqrt{z + \frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{2 - r^2}}{r\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{\sqrt{2 + r^2}}{r\sqrt{2}},$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{r}, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{r},$$

sont des fonctions uniformes de s exprimées par les quotients

$$\frac{\sigma_1 s}{\sigma s}, \quad \frac{\sigma_2 s}{\sigma s}, \quad \frac{\sigma_3 s}{\sigma s}.$$

On a ainsi une représentation géométrique de ces trois fonctions pour le cas $g_2 = 1$, $g_3 = 0$.

La demi-période réelle est donnée par

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}}.$$

Elle est égale au quart de la longueur totale de la lemniscate, car en revenant à la variable r, on a

$$\omega = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}},$$

ce qui est la longueur de l'arc OA.

III. — Pendule sphérique. Corps pesant de révolution. Élastique gauche.

68. **Pendule sphérique** (¹). — Le pendule sphérique est constitué par un point pesant mobile sans frottement sur une sphère fixe. Prenons pour origine le centre de la sphère et pour axe des z une verticale dirigée vers le haut. En coordonnées semipolaires l'équation de la sphère est

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

en désignant par l la longueur du pendule. Le mobile est soumis à l'action de deux forces, son poids et la réaction normale de la sphère; le théorème des forces vives donne donc

$$v^2 = -2gz + h.$$

De plus, les deux forces étant dans un même plan avec l'axe des z, on peut appliquer le principe des aires à la projection du mouvement sur le plan xOy :

$$r^2\,d\psi = C\,dt,$$

(¹) *Voir* aussi P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I.

ψ désignant l'angle polaire. Ces trois équations déterminent z, r et ψ en fonction de t.

Cherchons d'abord à déterminer z : il faudra pour cela éliminer r et ψ. L'équation des forces vives peut s'écrire

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\psi^2 + dz^2}{dt^2} = -2gz + h.$$

De l'équation de la sphère, on tire $r = \sqrt{l^2 - z^2}$; d'autre part, l'équation des aires donne

$$d\psi = \frac{C\,dt}{r^2} = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}.$$

Portant ces expressions dans l'équation des forces vives, on a une équation de la forme

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \varphi(z), \tag{1}$$

où $\varphi(z)$ désigne le polynome du troisième degré

$$\varphi(z) = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - C^2.$$

On en déduit le temps t et l'angle ψ en fonction de z par des intégrales elliptiques.

Pour que $\frac{dz}{dt}$ soit réel, il faut que $\varphi(z)$ soit positif. Ce polynome a ses racines réelles : en effet, appelons z_0 la valeur initiale de z et substituons dans $\varphi(z)$ la suite des nombres $+\infty$, l, z_0, $-l$; nous trouverons, pour les résultats des substitutions, les signes $+$, $-$, $+$, $-$, car z_0 rend évidemment $\varphi(z_0)$ positif, la valeur initiale de $\frac{dz}{dt}$ étant réelle. Il y a donc une racine z_1 de $\varphi(z)$ entre $+\infty$ et l, une autre z_2 entre l et z_0, une troisième z_3 entre z_0 et $-l$. Ainsi les nombres de la suite

$$z_1, \quad l, \quad z_2, \quad z_0, \quad z_3, \quad -l$$

sont rangés par ordre de grandeur décroissante. La variable z partant de z_0 ne peut varier que dans l'intervalle $z_2 z_3$ (nous avons supposé implicitement $\varphi(z_0) \neq 0$, ce qui, évidemment, n'implique aucune restriction).

Calcul de z. — La coordonnée z est donnée en fonction de t

par l'équation (1) d'après laquelle $l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ est égal à un polynome $\varphi(z)$ du troisième degré en z. Pour en tirer z par une fonction elliptique de t, nous commencerons par faire un changement linéaire de variable de la forme

$$(2)\qquad z = \mathrm{M}s + \mathrm{N},$$

où s désigne la nouvelle inconnue et M et N deux constantes, telles que l'équation (1) prenne la forme

$$(3)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Par la substitution (2) l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{\mathrm{M}^2 l^2} = \frac{\varphi(\mathrm{M}s + \mathrm{N})}{\mathrm{M}^2 l^2}.$$

Pour identifier avec la forme (3), il faut égaler à 4 le coefficient de s^3 et à o celui de s^2 dans le deuxième membre. On a ainsi

$$(5)\qquad \mathrm{M} = \frac{2l^2}{g}, \qquad \mathrm{N} = \frac{h}{6g}.$$

L'équation prend alors la forme (3) à condition d'attribuer aux constantes g_2 et g_3 des valeurs convenablement choisies.

Comme le polynome $\varphi(z)$ a trois racines réelles $z_1 > z_2 > z_3$, le polynome transformé

$$\frac{\varphi(\mathrm{M}s + \mathrm{N})}{\mathrm{M}^2 l^2} = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

a trois racines réelles e_1, e_2, e_3 :

$$(6)\qquad e_1 = \frac{z_1 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \qquad e_2 = \frac{z_2 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \qquad e_3 = \frac{z_3 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}},$$

et l'on a $e_1 > e_2 > e_3$, car M est positif.

Construisons alors la fonction pu avec les invariants g_2 et g_3; cette fonction vérifie l'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3 = \frac{\varphi(\mathrm{M}pu + \mathrm{N})}{\mathrm{M}^2 l^2}.$$

Si donc on pose

$$s = pu, \qquad z = \mathrm{M}pu + \mathrm{N},$$

u étant regardé comme fonction du temps t, l'équation (4) devient

$$p'^2 u \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4p^3 u - g_2 p u - g_3,$$

d'où

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 1, \qquad \frac{du}{dt} = \pm 1.$$

On peut toujours prendre le signe $+$, car pu étant paire, on peut changer le signe de u. On a alors

$$u = t + \text{const}.$$

Cherchons maintenant de quelle forme est la constante. Comme la valeur trouvée pour M est positive, la relation

$$z = \text{M} p u + \text{N}$$

montre que $s = pu$ varie dans le même sens que z. Donc quand z décroît de z_2 à z_3, pu décroît de e_2 à e_3, $u - \omega'$ est donc réel et l'on a

$$u = t + \omega',$$

si l'on compte le temps à partir de l'instant où $z = z_3$.

La demi-période réelle ω est le temps que met z à varier de z_2 à z_3.

Calcul de ψ. — L'angle ψ est défini par l'équation différentielle

$$d\psi = \frac{\text{C}\, dt}{l^2 - z^2},$$

que nous écrirons, en remarquant que $dt = du$,

$$d\psi = \frac{\text{C}\, du}{2l}\left(-\frac{1}{z - l} + \frac{1}{z + l}\right).$$

Dans cette équation, il faut remplacer z par sa valeur

$$z = \text{M} p u + \text{N};$$

le coefficient de du est alors une fonction elliptique de u que nous allons décomposer en éléments simples, de façon à pouvoir intégrer.

Considérons deux arguments a et b définis par les relations

(7) $$l = \text{M} p a + \text{N}, \qquad -l = \text{M} p b + \text{N},$$

ces arguments sont de la forme $\omega + it'$ et it'' (n° 59, 2° et 4°); ils ne sont définis qu'aux signes près; nous verrons plus loin comment il convient de choisir leurs signes. Alors l'expression de $d\psi$ devient

$$d\psi = \frac{C\,du}{2Ml}\left(-\frac{1}{pu - pa} + \frac{1}{pu - pb}\right),$$

où il reste à donner une forme simple au coefficient $\frac{C}{2Ml}$.

Pour cela remarquons que le polynome

$$\frac{\varphi(z)}{M^2 l^2} = \frac{\varphi(M pu + N)}{M^2 l^2}$$

se réduit à $-\frac{C^2}{M^2 l^2}$ pour $z = l$ et $z = -l$, c'est-à-dire pour $u = a$ et $u = b$; comme on a identiquement

$$p'^2 u = \frac{\varphi(M pu + N)}{M^2 l^2},$$

on trouve, en faisant successivement $u = a$ et $u = b$,

$$p'^2 a = -\frac{C^2}{M^2 l^2}, \qquad p'^2 b = -\frac{C^2}{M^2 l^2}.$$

Nous prendrons, en extrayant les racines,

$$p'a = p'b = \frac{iC}{Ml},$$

ce qu'on peut toujours faire, car jusqu'à présent les signes de a et b n'étaient pas déterminés; nous les déterminerons par le choix de signes que nous venons de faire pour $p'a$ et $p'b$.

On peut donc écrire

$$2i\frac{d\psi}{du} = \frac{p'b}{pu - pb} - \frac{p'a}{pu - pa}.$$

La décomposition du second membre en éléments simples se fait en appliquant deux fois la formule (64) du n° 44 :

$$\begin{aligned} 2i\frac{d\psi}{du} = {} & \zeta(u + a) - \zeta(u - a) - 2\zeta a \\ & - \zeta(u + b) + \zeta(u - b) + 2\zeta b. \end{aligned}$$

En intégrant et en remontant des logarithmes aux nombres, on

trouve

$$e^{2i\psi} = - E^2 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)} e^{2u(\zeta b - \zeta a)}.$$

La constante d'intégration $-E^2$ se détermine par les conditions initiales.

L'angle ψ est ainsi exprimé en fonction du temps.

Expressions de x et y. — On a

$$e^{2i\psi} = \frac{x+iy}{x-iy} = - E^2 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)} e^{2u(\zeta b - \zeta a)}.$$

D'autre part, d'après l'équation de la sphère,

$$(x+iy)(x-iy) = (l-z)(l+z) = - M^2(pu - pa)(pu - pb),$$

$$(x+iy)(x-iy) = - M^2 \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u \sigma^2 a} \frac{\sigma(u+b)\sigma(u-b)}{\sigma^2 u \sigma^2 b}.$$

En multipliant membre à membre les égalités qui donnent $\dfrac{x+iy}{x-iy}$ et $(x+iy)(x-iy)$ on obtient $(x+iy)^2$:

$$x+iy = EM \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma a \sigma b \sigma^2 u} e^{u(\zeta b - \zeta a)};$$

on en conclut

$$x-iy = -\frac{1}{E} M \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma a \sigma b \sigma^2 u} e^{-u(\zeta b - \zeta a)}.$$

Enfin, remplaçons M par sa valeur en fonction des éléments elliptiques, valeur qui peut s'obtenir en retranchant membre à membre les égalités

$$l = M pa + N, \qquad -l = M pb + N;$$

on aura

$$M = \frac{2l}{pa - pb} = -2l \frac{\sigma^2 a \sigma^2 b}{\sigma(a+b)\sigma(a-b)};$$

et il viendra :

$$x+iy = -lE \frac{2\sigma a \sigma b}{\sigma(a+b)\sigma(a-b)} \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma^2 u} e^{u(\zeta b - \zeta a)},$$

$$x-iy = \frac{l}{E} \frac{2\sigma a \sigma b}{\sigma(a+b)\sigma(a-b)} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u} e^{-u(\zeta b - \zeta a)}.$$

On a ainsi x, y, z exprimés en fonctions uniformes de t. Quand

t augmente de 2ω, z reprend la même valeur, et l'angle polaire ψ augmente d'une certaine constante.

69. **Corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe.** — Prenons pour origine le point de suspension O, pour axes liés au corps l'axe de révolution Oz et deux axes perpendiculaires, pour axes fixes la verticale ascendante Oz_1 et deux axes perpendiculaires. On démontre en Mécanique [1] que les angles d'Euler θ, φ, ψ, qui définissent la position des axes liés au corps par rapport aux axes fixes, sont donnés en fonction du temps par les formules suivantes. D'abord, en posant $\cos\theta = z$, on a

$$(1)\qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\alpha - mz)(1 - z^2) - (\beta - nz)^2 = f(z),$$

où m, n, α, β désignent des constantes, dont la première m est positive, de sorte que $f(z)$ est un polynome de troisième degré. On a ensuite

$$(2)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - nz}{1 - z^2},$$

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\frac{\beta - nz}{1 - z^2},$$

r_0 désignant une autre constante.

Il s'agit de tirer de ces équations θ, φ, ψ en fonction du temps. Les calculs, comme on va le voir, présentent une grande analogie avec ceux que nous venons de faire pour le pendule sphérique. Cette analogie peut aller jusqu'à l'identité, car, dans le cas particulier où le corps pesant de révolution se réduit à un seul point matériel, il constitue un pendule sphérique.

Le polynome $f(z)$ est négatif pour les valeurs $-\infty$, -1 et $+1$ de z, tandis qu'il est positif (ou nul) pour la valeur initiale z_0 de z qui rend nécessairement $\frac{dz}{dt}$ réel et pour $+\infty$. Il a donc ses trois racines z_1, z_2, z_3 réelles et comprises respectivement dans les intervalles $(+\infty, +1)$, $(+1, z_0)$ et $(z_0, -1)$.

Calcul de z. — Commençons par faire un changement linéaire de variable

$$z = Ms + N,$$

[1] *Voir* P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II.

où M et N sont des constantes choisies de telle façon que l'équation en s prenne la forme

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Par ce changement l'équation (1) devient

$$(5)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{f(\mathrm{M}s+\mathrm{N})}{\mathrm{M}^2}.$$

On déterminera les coefficients M et N de façon à rendre égal à 4 le coefficient de s^3 et à 0 celui de s^2; après cette détermination, qui donne pour M la valeur positive $\mathrm{M} = \frac{4}{m}$, on pourra écrire

$$(6)\qquad \frac{f(\mathrm{M}s+\mathrm{N})}{\mathrm{M}^2} = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

à condition de donner aux invariants g_2 et g_3 les valeurs qui rendent le premier membre identique au deuxième.

Les racines du polynome $f(z)$ étant, par ordre de grandeurs décroissantes, z_1, z_2, z_3, celles du polynome transformé en s seront

$$e_1 = \frac{z_1 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \qquad e_2 = \frac{z_2 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \qquad e_3 = \frac{z_3 - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}.$$

Pour que $f(z)$ soit positif il faut que z partant de z_0 varie entre z_2 et z_3; donc s devra varier entre e_2 et e_3.

Si l'on construit la fonction pu aux invariants g_2 et g_3, cette fonction vérifiera l'équation

$$(7)\qquad p'^2 u = \frac{f(\mathrm{M}pu+\mathrm{N})}{\mathrm{M}^2} = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Nous poserons alors $s = pu$ en regardant u comme une fonction de t, et l'équation (5) deviendra

$$p'^2 u \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 1, \qquad \frac{du}{dt} = +1,$$

où nous prenons $+1$, car, pu étant paire, on peut toujours

changer u de signe. On a alors

$$u = t + \text{const.},$$

et, comme $s = pu$ doit rester compris entre e_2 et e_3, $u - \omega'$ doit être réel. Nous ferons

$$(8) \qquad u = t + \omega';$$

alors pour $t = 0$, $u = \omega'$, $pu = e_3$, $z = z_3$.

Le temps est donc compté à partir d'un instant où $z = z_3$.

En résumé, nous avons exprimé z en fonction uniforme du temps par la formule

$$z = \mathrm{M}pu + \mathrm{N}, \qquad u = t + \omega'.$$

La demi-période ω est le temps que met z à varier de z_3 à z_2 et inversement.

Calcul de ψ. — On a

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - nz}{1 - z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + n}{z + 1} - \frac{\beta - n}{z - 1}\right).$$

Remplaçant, dans cette expression, z par sa valeur

$$z = \mathrm{M}pu + \mathrm{N},$$

et dt par du, on est ramené, pour avoir ψ, à intégrer une fonction elliptique. Pour faire cette intégration il faut décomposer la fonction elliptique du second membre en éléments simples. Pour cela, déterminons deux arguments constants a et b par les conditions que pour $u = a$, z devienne égal à 1 et pour $u = b$, z devienne égal à -1 :

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}pa + \mathrm{N} = 1, \\ \mathrm{M}pb + \mathrm{N} = -1. \end{cases}$$

Ces arguments, de la forme $\omega + it'$ et it'', sont déterminés aux signes près par ces deux équations, si l'on regarde comme équivalentes deux valeurs de a ou deux valeurs de b ne différant que par des multiples des périodes. On aura alors

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{2\mathrm{M}}\left(\frac{\beta + n}{pu - pb} - \frac{\beta - n}{pu - pa}\right).$$

Les rapports $\dfrac{\beta + n}{\mathrm{M}}$, $\dfrac{\beta - n}{\mathrm{M}}$ s'expriment d'une manière simple à

l'aide de a et b. Remarquons pour cela que le polynome $f(z)$ se réduit à $-(\beta - n)^2$ pour $z = 1$ et à $-(\beta + n)^2$ pour $z = -1$. Donc la fonction $f(\mathrm{M}pu + \mathrm{N})$ se réduit à $-(\beta - n)^2$ pour $u = a$ et à $-(\beta + n)^2$ pour $u = b$. Mais comme on a identiquement

$$p'^2 u = \frac{f(\mathrm{M}pu + \mathrm{N})}{\mathrm{M}^2},$$

on a, en faisant successivement $u = a$ et $u = b$,

$$p'^2 a = -\frac{(\beta - n)^2}{\mathrm{M}^2}, \qquad p'^2 b = -\frac{(\beta + n)^2}{\mathrm{M}^2}.$$

En extrayant les racines, nous prendrons

$$p'a = i\frac{\beta - n}{\mathrm{M}}, \qquad p'b = i\frac{\beta + n}{\mathrm{M}},$$

en choisissant convenablement les signes de a et b qui jusqu'ici étaient restés indéterminés. Nous aurons alors

$$2i\frac{d\psi}{du} = \frac{p'b}{pu - pb} - \frac{p'a}{pu - pa}.$$

L'intégration s'effectue comme dans le cas du pendule sphérique.

Si l'on appelle α'', β'', γ'' les cosinus des angles que fait l'axe Oz du corps avec les axes fixes Ox_1, Oy_1, Oz_1, on a

$$\gamma'' = z, \qquad \alpha''^2 + \beta''^2 + z^2 = 1;$$

de plus α'' et β'' sont les coordonnées x_1 et y_1 du point situé sur l'axe du corps à une distance 1 du point O; en appliquant une méthode identique à celle que nous avons suivie pour calculer x et y dans le pendule sphérique, avec ce seul changement que, actuellement, l se trouve remplacé par 1, on trouve

$$\alpha'' + i\beta'' = -\mathrm{E}\,\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u}\,e^{u(\zeta b - \zeta a)},$$

$$\alpha'' - i\beta'' = \frac{1}{\mathrm{E}}\,\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}\,e^{-u(\zeta b - \zeta a)},$$

avec

$$u = t + \omega'.$$

Calcul de φ. — On a

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\frac{\beta - nz}{1 - z^2}.$$

Décomposant le second membre en fractions simples, il vient

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - n + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + n}{z + 1} + \frac{\beta - n}{z - 1}\right).$$

Remplaçant z par $M\,pu + N$ et introduisant comme tout à l'heure les arguments a et b, on a

$$\frac{d\varphi}{du} = r_0 - n + \frac{1}{2i}\left(\frac{p'a}{pu - pa} + \frac{p'b}{pu - pb}\right);$$

d'où, en décomposant en éléments simples,

$$\begin{aligned}2i\frac{d\varphi}{du} = 2i(r_0 - n) + \zeta(u - a) - \zeta(u + a) + 2\zeta a \\ + \zeta(u - b) - \zeta(u + b) + 2\zeta b,\end{aligned}$$

et en intégrant

$$e^{2i\varphi - 2i(r_0 - n)u} = C\frac{\sigma(u - a)\sigma(u - b)}{\sigma(u + a)\sigma(u + b)}e^{2u(\zeta a + \zeta b)};$$

la constante C se détermine en écrivant, par exemple, que φ est nul pour $t = 0$, c'est-à-dire $u = \omega'$.

70. La courbe élastique gauche (¹). — Il s'agit de trouver la figure d'équilibre d'une tige flexible dont la section est circulaire et qui est soumise à l'action de forces appliquées seulement à ses extrémités.

Si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, on trouve pour définir la courbe cherchée les équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} y'z'' - z'y'' = \alpha x' + \beta y, \\ z'x'' - x'z'' = \alpha y' - \beta x, \\ x'y'' - y'x'' = \alpha z' + \gamma, \end{cases}$$

dans lesquelles x', y', z', x'', y'', z'' désignent les dérivées par rap-

(¹) *Voir* HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 93; *Œuvres*, t. III, Paris, 1912, p. 361; et une Note de J. Bertrand dans la *Mécanique analytique* de LAGRANGE (édition publiée par G. Darboux, t. I, p. 460).

port à l'arc s des coordonnées x, y, z et α, β, γ des constantes dont les deux premières sont essentiellement positives.

Ajoutons membre à membre les équations précédentes après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles respectivement par x', y', z'; en tenant compte de la relation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

nous trouvons

$$(2) \qquad \alpha + \beta(yx' - xy') + \gamma z' = 0$$

et en différentiant le premier membre par rapport à s

$$(3) \qquad \beta(yx'' - xy'') + \gamma z'' = 0.$$

Multiplions maintenant par x les deux membres de la première équation différentielle, par y les deux membres de la deuxième et ajoutons, il vient

$$z''(xy' - yx') - z'(xy'' - yx'') = \alpha(xx' + yy').$$

et, si l'on remplace $xy' - yx'$ et $xy'' - yx''$ par leurs valeurs en fonction de z' et de z'' tirées des équations (2) et (3) ;

$$z''(\alpha + \gamma z') - z'\gamma z'' = \alpha\beta(xx' + yy'),$$

ou encore

$$\beta(xx' + yy') = z''.$$

En intégrant et en désignant par δ une nouvelle constante,

$$\beta(x^2 + y^2) = 2(z' - \delta).$$

Ainsi, des équations différentielles données (1), nous pouvons déduire le système suivant :

$$\begin{aligned}
\beta(xy' - yx') &= \alpha + \gamma z', \\
\beta(xx' + yy') &= z'', \\
\beta(x^2 + y^2) &= 2(z' - \delta).
\end{aligned}$$

Servons-nous maintenant de l'identité

$$(xx' + yy')^2 + (yx' - xy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2),$$

nous obtiendrons, pour déterminer z', l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz'}{ds}\right)^2 = 2\beta(1 - z'^2)(z' - \delta) - (\alpha + \gamma z')^2.$$

Dans le cas particulier où $\gamma = 0$, cette équation différentielle a, au signe de z' près, la même forme que celle qui s'est présentée à propos du pendule sphérique et s'intègre de la même manière.

Si $\gamma \neq 0$, l'équation différentielle ne diffère de celle qui donne $z = \cos\theta$, dans le mouvement d'un corps grave de révolution, que par le signe de z'; la méthode suivie dans ce dernier cas s'applique donc sans difficulté au cas de l'élastique gauche et l'on pourrait d'ailleurs mettre les problèmes en équation de manière à aboutir à des équations différentielles identiques.

D'après un théorème dû à Kirchhoff, l'axe du pendule sphérique ou d'une toupie dont la pointe est fixe reste toujours parallèle à la tangente à une courbe élastique gauche, le point de contact de la tangente décrivant la courbe avec une vitesse constante ([1]).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III.

1. Déterminer les paramètres des points de contact des tangentes menées à la cubique $x = pu$, $y = p'u$ par le sommet A_1 de la branche infinie (ω et ω' réels).

En conclure que, Ox étant supposé horizontal, si l'on considère le point le plus haut de l'ovale on peut prendre pour paramètre de ce point une quantité de la forme $a + \omega'$, a étant une quantité réelle comprise entre 0 et $\frac{\omega}{2}$.

(Il suffit pour le voir de prendre un argument $u + \omega'$, de faire varier u de 0 à $\frac{\omega}{2}$ et de remarquer que $\frac{\omega}{2} + \omega'$ correspond à une tangente menée du sommet A_1.)

2. Le rapport anharmonique des quatre tangentes menées à la cubique par un point P pris sur la courbe reste constant quand le point P se déplace sur la cubique.

([1]) *Voir* Greenhill, *Les Fonctions elliptiques et leurs applications*, trad. par Griess, Paris 1895, p. 318-320; H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 201; L. Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. II, Paris 1915, p. 397.

(On peut obtenir ce rapport anharmonique en fonction des coordonnées du point P et des coordonnées des quatre points de contact. On exprime ensuite ces coordonnées à l'aide des paramètres elliptiques correspondants et l'on applique la formule de l'exemple **2**, p. 63; *cf.* aussi n° **117**.)

3. Si l'on appelle *points correspondants* d'une cubique deux points tels que les tangentes en ces points vont se couper sur la courbe, il y a trois points correspondants d'un point donné et, en désignant par u le paramètre du point donné, on peut prendre comme paramètres des points correspondants

$$u+\omega, \quad u+\omega', \quad u+\omega+\omega';$$

chacune des demi-périodes définit un des trois systèmes de correspondance.

Si l'on considère deux couples de points correspondants du même système : A, A′ d'une part, B, B′ d'autre part, les droites qui joignent les points non correspondants AB, A′B′ ou AB′, BA′ se coupent sur la courbe et les deux nouveaux points sont des points correspondants dans le même système.

4. Sur la cubique définie par les équations

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u,$$

on prend deux points dont les paramètres diffèrent d'une constante v; la droite qui joint ces deux points enveloppe une courbe de sixième classe.

Dans le cas particulier où v a l'une des valeurs

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega+\omega',$$

l'enveloppe est une courbe de troisième classe (qui se présente ici comme comptée deux fois).

(Dans l'équation de la droite joignant les deux points on remplace les coordonnées courantes par les coordonnées x_0, y_0 d'un point P_0; l'équation en u ainsi obtenue a six racines dans un parallélogramme élémentaire. Dans le cas particulier où $v=\omega$ par exemple, l'équation en u ne change pas quand on change u en $u+\omega$.)

Remarque. — La cubique donnée peut être regardée comme la hessienne d'une autre cubique C et cela de trois manières différentes: les courbes de troisième classe qui viennent d'être définies sont les cayleyennes des trois cubiques C. On pourra consulter à ce sujet Clebsch (Lindemann), *Leçons sur la Géométrie* (traduction Benoist), t. II. Paris, 1880, p. 381.

5. Si deux systèmes de trois droites ont huit de leurs neuf points d'intersection sur une cubique, le neuvième point d'intersection est aussi sur la cubique.

(Cette proposition peut se vérifier directement à l'aide de la condition pour que trois points soient en ligne droite; elle peut aussi se déduire d'un théorème démontré n° **64**.)

Si l'on appelle *tangentiel* d'un point m d'une cubique le point où la tangente en m rencontre encore la cubique, les tangentiels de trois points en ligne droite sont en ligne droite.

La droite qui joint deux points d'inflexion va passer par un troisième point d'inflexion (on remarque qu'un point d'inflexion se confond avec son tangentiel).

6. Déterminer les points d'inflexion de la cubique

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

en étudiant la variation du coefficient angulaire de la tangente.

[On trouve pour les déterminer l'équation

$$p'u\, p'''u - (p''u)^2 = 0$$

ou, en posant $x = pu$, l'équation

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2} g_2 x^2 - g_3 x - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} g_2\right)^2 = 0,$$

dont la dérivée est

$$f'(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Si g_2 et g_3 sont réels, cette équation a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées. Ces racines sont

$$p\frac{2\omega}{3}, \quad p\frac{2\omega'}{3}, \quad p\left(\frac{2\omega}{3} + \frac{2\omega'}{3}\right), \quad p\left(\frac{2\omega}{3} - \frac{2\omega'}{3}\right);$$

si on les désigne par a, b, c, d, elles vérifient la relation

$$2S = (a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)(a-d)(b-c)(b-d) = 0,$$

qui s'obtient en appliquant les formules (7) et (9) page 67 (S est un invariant de l'équation).]

7. Étant donnés trois points P, Q, R sur une cubique, déterminer un triangle ABC dont les sommets soient sur la courbe et dont les côtés passent respectivement par les points donnés P, Q, R.

(Il y a quatre solutions. Si les trois points P, Q, R sont en ligne droite, les sommets de l'un des triangles sont en ligne droite : il reste seulement trois triangles proprement dits.)

8. Si l'on considère une conique ayant deux fois un contact du deuxième ordre (trois points confondus) avec une cubique, la droite qui joint les points de contact va passer par un point d'inflexion.

9. Si l'on considère l'une des trois tangentes menées d'un point d'inflexion, le point de contact est tel qu'il existe une conique ayant en ce point avec la cubique un contact du cinquième ordre (six points confondus). Retrouver que le nombre de ces coniques est 27.

10. On mène la tangente à une cubique en un point P_0; soit P_1 le point où cette tangente rencontre de nouveau la courbe. On mène la tangente en P_1, soit P_2 le point où cette tangente rencontre de nouveau la courbe. On détermine ainsi une suite de points

$$P_0, \quad P_1, \quad \ldots, \quad P_r,$$

dont chacun est le tangentiel du précédent. Trouver la condition pour que le contour ayant ces points pour sommets successifs se ferme et forme un polygone de r côtés.

[On écrit la relation qui existe entre les paramètres de deux sommets consécutifs et l'on exprime que P_r coïncide avec P_0; on trouve que le paramètre de P_0 doit satisfaire à la condition

$$u^0 = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{(-1)^{r-1}2^r + 1},$$

mais il faut encore examiner si le polygone correspondant à une détermination des entiers m et n a bien r côtés.

Par exemple, pour $r = 3$, on trouve parmi les solutions les tangentes d'inflexion comptées trois fois.]

CHAPITRE IV.

ÉTUDE SPÉCIALE DES NOTATIONS DE JACOBI.

I. — Fonctions de Jacobi.

71. Objet du Chapitre. — Les séries et produits à double entrée employés pour définir les éléments σ, ζ, p, Z, H à l'aide desquels on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques, peuvent être remplacés, aussi bien dans la notation de Weierstrass que dans celle de Jacobi, par des séries à simple entrée beaucoup plus rapidement convergentes.

Nous allons exposer ici les notations de Jacobi : nous avons d'ailleurs montré comment on passe d'un système de notations à l'autre, en donnant la relation entre les fonctions H et σ (n° 21).

72. Périodes. — Nous avons déjà dit (n° 17) que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des deux périodes doit être imaginaire, sans quoi le réseau des parallélogrammes n'existerait pas. On peut toujours changer le signe de ω ou de ω', car une fonction admettant pour périodes 2ω et $2\omega'$ admet aussi pour périodes -2ω et $2\omega'$ par exemple. Nous pouvons donc choisir les signes des périodes de façon que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit *positif;* c'est là ce que nous supposerons toujours. Jacobi désigne les périodes par $2K$ et $2iK'$; dans le cas particulier où K et K' sont réels, le rapport $\frac{K'}{K}$ doit être positif. Nous pourrons employer tantôt l'une tantôt l'autre manière de désigner les périodes : on se rappellera que

$$\omega = K, \qquad \omega' = iK'.$$

Si, dans le cas général, on pose

$$q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}} = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

le nombre q a un module *plus petit que l'unité*, car la partie réelle de l'exposant $\frac{\pi\omega' i}{\omega}$ est négative.

73. Développement en série simple de la fonction $Z(u)$. Valeur de δ. — La fonction

$$Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)},$$

construite, comme nous l'avons expliqué (n° 21), avec les périodes 2ω et $2\omega'$, a pour pôles simples de résidu $+1$ tous les points

$$u = 2m\omega + 2n\omega',$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles.

Nous allons construire cette fonction d'une autre manière, en formant, à l'aide d'une série de cotangentes, une fonction ayant les mêmes pôles et les mêmes résidus que Z. Le point de départ de la méthode réside dans ce fait que la fonction

$$\frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') + \text{const.},$$

où n est un entier déterminé, a pour pôles simples de résidu $+1$ tous les points

$$u - 2n\omega' = 2m\omega$$

ou

$$u = 2m\omega + 2n\omega' \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty).$$

Considérons la fonction

$$U_n = \frac{\pi}{2\omega}\left[\cot \frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right],$$

où n désigne un entier positif; elle admet comme pôles simples, avec le résidu $+1$, tous les points

$$u = 2n\omega' + 2m\omega \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction peut s'écrire

$$U_n = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\cos \frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i \sin \frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega')}{\sin \frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega')}$$

ou, en introduisant la quantité $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$,

$$U_n = \frac{i\pi}{\omega} \frac{-e^{-\frac{\pi u i}{2\omega}} q^n}{e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} q^{-n} - e^{-\frac{\pi u i}{2\omega}} q^n} = \frac{i\pi}{\omega} \frac{e^{-\frac{\pi u i}{\omega}} q^{2n}}{1 - e^{-\frac{\pi u i}{\omega}} q^{2n}}$$

Or, u étant donné, on peut toujours choisir un entier n_0 de telle sorte qu'on ait

$$\left| q^{2n} e^{-\frac{\pi u i}{\omega}} \right| < \frac{1}{2}$$

pour $n > n_0$. Il résulte de là que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est absolument convergente, à la façon d'une progression géométrique de raison q^2; de plus, la série est uniformément convergente pour $|q| \leqq q_1$ (q_1 étant un nombre positif inférieur à 1) et pour $\left|\frac{u}{\omega}\right|$ borné.

Considérons de même, en supposant maintenant n entier et *négatif*, la fonction

$$V_n = \frac{\pi}{2\omega} \left[\cot \frac{\pi}{2\omega} (u - 2n\omega') + i \right];$$

elle admet comme pôles, avec le résidu $+1$, tous les points

$$u = 2n\omega' + 2m\omega \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

on peut l'écrire

$$V_n = \frac{i\pi}{\omega} \frac{e^{\frac{\pi u i}{\omega}} q^{-2n}}{e^{\frac{\pi u i}{\omega}} q^{-2n} - 1},$$

et l'on voit que la série

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} V_n$$

est absolument et uniformément convergente dans les mêmes conditions que la précédente.

Nous allons vérifier que la fonction

$$\Phi(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right]$$
$$+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')+i\right]$$

est identique à $Z(u)$.

D'abord cette fonction $\Phi(u)$ est impaire comme $Z(u)$; on le vérifie immédiatement en écrivant la série qui donne $\Phi(-u)$: cette série est égale à $-\Phi(u)$. La fonction $\Phi(u)$ a les mêmes pôles et les mêmes résidus que $Z(u)$. Elle satisfait aux relations

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \frac{i\pi}{\omega}.$$

La première de ces relations est évidente, car chaque cotangente admet la période 2ω; la deuxième se trouve en formant la différence

$$\Phi(u+2\omega')-\Phi(u)$$

et remarquant que, dans la différence des deux séries, les termes se détruisent deux à deux sauf deux termes $\frac{i\pi}{2\omega}$.

Considérons alors la fonction

$$\Psi(u) = \Phi(u) - Z(u).$$

Cette fonction est holomorphe en tous les points à distance finie, car, dans le voisinage d'un point

$$u = 2m\omega + 2n\omega',$$

on a

$$\Phi(u) = \frac{1}{u-2m\omega-2n\omega'} + \text{fonction holomorphe},$$

$$Z(u) = \frac{1}{u-2m\omega-2n\omega'} + \text{fonction holomorphe},$$

et, en retranchant, on voit que $\Psi(u)$ est holomorphe au point considéré. En outre, d'après les relations que vérifient $\Phi(u)$ et $Z(u)$ [*cf.* (**21**), p. 28], on a

$$\Psi(u+2\omega) = \Psi(u),$$
$$\Psi(u+2\omega') = \Psi(u) - \frac{i\pi}{\omega} + \frac{2\delta}{\omega}.$$

En répétant un raisonnement qui a déjà été fait (n° 21), on voit que

$$\delta = \frac{i\pi}{2}$$

et, de plus, que la fonction $\Psi(u)$ est une constante.

Ainsi

$$\Phi(u) = Z(u) + \text{const.}$$

Cette constante est nulle puisque $\Phi(u)$ et $Z(u)$ sont impaires toutes les deux.

En définitive, on a obtenu pour $Z(u)$ le développement

$$\begin{aligned} Z(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega') - i\right] \\ &+ \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega') + i\right]. \end{aligned}$$

De plus, en se rappelant que l'on a posé $\delta = \eta\omega' - \omega\eta'$ (p. 28), on voit que l'on a démontré la relation suivante

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{i\pi}{2},$$

dans l'hypothèse où la partie réelle de $\frac{\omega'}{i\omega}$ est positive. D'ailleurs, $\eta\omega' - \omega\eta'$ est remplacé par $-(\eta\omega' - \omega\eta')$ lorsqu'on remplace ω' par $-\omega'$ et $\eta' = \zeta\omega'$ par $-\eta'$; par suite, quand la partie réelle de $\frac{\omega'}{i\omega}$ est négative, on doit écrire

$$\eta\omega' - \omega\eta' = -\frac{i\pi}{2}.$$

71. Fonction H. — Nous avons déjà défini la fonction H comme une fonction dont la dérivée logarithmique est Z. L'expression simple que nous venons de trouver pour Z va nous donner, par intégration, un produit très convergent servant à définir H. Le problème se pose comme il suit :

Trouver la fonction dont la dérivée logarithmique est

$$\begin{aligned} Z(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega') + i\right] \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega') - i\right]. \end{aligned}$$

Pour écrire le second membre, nous avons changé n en $-n$ dans une des sommes qui figurent dans $Z(u)$.

Si l'on intègre entre o et u le terme

$$\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right],$$

on trouve

$$\operatorname{Log}\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}{\sin\frac{n\pi\omega'}{\omega}}+\frac{i\pi u}{2\omega},$$

puis, en remontant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}{\sin\frac{n\pi\omega'}{\omega}}\,e^{\frac{i\pi u}{2\omega}},$$

ou bien

$$\frac{\left[e^{\frac{i\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}-e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}\right]e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}}{e^{i\pi\frac{n\omega'}{\omega}}-e^{-i\pi\frac{n\omega'}{\omega}}},$$

ou enfin, en effectuant au numérateur, puis en multipliant les deux termes par $e^{n\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$,

$$\frac{1-q^{2n}e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right]=\frac{d}{du}\operatorname{Log}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2n}e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

On voit de même que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right]=\frac{d}{du}\operatorname{Log}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2n}e^{-\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

Nous avons ainsi les expressions des deux sommes qui entrent dans $Z(u)$.

D'ailleurs,

$$\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi}{2\omega}u=\frac{d}{du}\operatorname{Log}\sin\frac{\pi u}{2\omega}.$$

Donc on peut écrire

$$Z(u) = \frac{d}{du} \operatorname{Log} H(u),$$

en posant

$$H(u) = C \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{\omega}}\right),$$

où C désigne un facteur constant. On trouve enfin, en effectuant le produit des deux facteurs du terme général,

$$H(u) = C \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - 2q^{2n} \cos\frac{\pi u}{\omega} + q^{4n}\right),$$

le produit infini étant absolument convergent pour $|q| < 1$, et uniformément convergent pour $\left|\frac{u}{\omega}\right|$ borné et $|q| \leqq q_1 < 1$.

75. **Développement de $H(u)$ en série trigonométrique.** — Admettons que le produit Π qui figure dans l'expression ci-dessus de $H(u)$ puisse être ordonné suivant les puissances positives de $\cos\frac{\pi u}{\omega}$: comme une puissance positive de $\cos\frac{\pi u}{\omega}$ est égale à une somme de cosinus des multiples de $\frac{\pi u}{\omega}$, on voit que le produit Π peut être développé en une série de la forme

$$\Pi = c_0 + c_1 \cos\frac{\pi u}{\omega} + c_2 \cos\frac{2\pi u}{\omega} + \ldots.$$

Pour avoir $H(u)$, il faut multiplier par $A \sin\frac{\pi u}{2\omega}$; on peut, dans le produit obtenu, remplacer chaque terme de la forme

$$\sin\frac{\pi u}{2\omega} \cos\frac{n\pi u}{\omega}$$

par une différence de sinus. On est ainsi conduit pour $H(u)$ à un développement de la forme suivante, où, d'après les notations de Jacobi, nous faisons $\omega = K$, $\omega' = iK'$:

$$H(u) = a_0 \sin\frac{\pi u}{2K} + a_1 \sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots + a_n \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K} + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant les sinus par des exponentielles,

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u) = {} & \mathrm{A}_0\, e^{\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \mathrm{A}_1\, e^{\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \mathrm{A}_2\, e^{\frac{5i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \ldots + \mathrm{A}_n\, e^{\frac{(2n+1)i\pi u}{2\mathrm{K}}} \\ & - \mathrm{A}_0\, e^{-\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \mathrm{A}_1\, e^{-\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \ldots.\end{aligned}$$

Pour déterminer A_0, A_1, ..., on se sert de la formule (26) du n° 21 où l'on remplace δ par sa valeur $\frac{i\pi}{2}$:

$$\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{i\pi u}{\mathrm{K}}} \mathrm{H}(u).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}') = {} & \mathrm{A}_0 q\, e^{\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \mathrm{A}_1 q^3\, e^{\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \mathrm{A}_2 q^5\, e^{\frac{5i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \ldots \\ & - \mathrm{A}_0 \frac{1}{q} e^{-\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \mathrm{A}_1 \frac{1}{q^3} e^{-\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \mathrm{A}_2 \frac{1}{q^5} e^{-\frac{5i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \ldots.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} e^{-\frac{2i\pi u}{2\mathrm{K}}} \mathrm{H}(u) = {} & \frac{\mathrm{A}_0}{q} e^{-\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \frac{\mathrm{A}_1}{q} e^{\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} + \frac{\mathrm{A}_2}{q} e^{\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \ldots \\ & - \frac{\mathrm{A}_0}{q} e^{-\frac{3i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \frac{\mathrm{A}_1}{q} e^{-\frac{5i\pi u}{2\mathrm{K}}} - \ldots.\end{aligned}$$

Identifiant ces deux séries, on a les relations compatibles

$$\frac{1}{q}\mathrm{A}_1 = -q\,\mathrm{A}_0, \quad \frac{1}{q}\mathrm{A}_2 = -q^3\mathrm{A}_1, \quad \ldots, \quad \frac{1}{q}\mathrm{A}_n = -q^{2n-1}\mathrm{A}_{n-1}, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{q}\mathrm{A}_0 = -\frac{1}{q^3}\mathrm{A}_1, \quad \frac{1}{q}\mathrm{A}_1 = -\frac{1}{q^5}\mathrm{A}_2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{q}\mathrm{A}_{n-1} = -\frac{1}{q^{2n+1}}\mathrm{A}_n, \quad \ldots,$$

qui se réduisent à

$$\mathrm{A}_1 = -q^2\mathrm{A}_0, \quad \mathrm{A}_2 = -q^4\mathrm{A}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n = -q^{2n}\mathrm{A}_{n-1}, \quad \ldots;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\mathrm{A}_n = (-1)^n q^{n(n+1)}\mathrm{A}_0.$$

On a donc

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{A}_0 \Sigma (-1)^n q^{n(n+1)} \left[e^{(2n+1)\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} - e^{-(2n+1)\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} \right],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u) & = \mathrm{B}\,\Sigma(-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}} \\ & = \mathrm{B}\left[\sin\frac{\pi u}{2\mathrm{K}} - q^2 \sin\frac{3\pi u}{2\mathrm{K}} + \ldots + (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}} + \ldots\right.\end{aligned}$$

Le coefficient B peut être choisi arbitrairement, car jusqu'ici $H(u)$ n'a été défini qu'à un facteur constant près. On choisit $B = 2q^{\frac{1}{4}}$, la racine quatrième étant prise égale par convention à $e^{\frac{\pi i \omega'}{4\omega}} = e^{-\frac{\pi K'}{4K}}$, et l'on a pour $H(u)$ le développement

$$H(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}} \sin\frac{5\pi u}{2K} + \ldots$$
$$+ (-1)^n 2q^{\frac{4n^2+4n+1}{4}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}$$

ou encore

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin\frac{3\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin\frac{5\pi u}{2K} + \ldots$$
$$+ (-1)^n 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}.$$

Cette série converge absolument pour $|q| < 1$ et uniformément pour $|q| \leqq q_1 < 1$ et $\left|\frac{u}{K}\right|$ borné, ce qui permettrait de légitimer les opérations précédentes; de plus, la série converge très rapidement, plus rapidement qu'une progression géométrique, car les exposants de $q^{\frac{1}{4}}$ croissent comme les carrés des nombres entiers.

Quand il sera nécessaire d'indiquer les périodes avec lesquelles est construite la fonction $H(u)$, nous écrirons cette fonction $H(u \mid K, iK')$, notation analogue à celle que nous avons employée pour σu en écrivant $\sigma(u \mid \omega, \omega')$.

76. Fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 de Jacobi. — Nous avons vu que σu et $H(u)$ sont analogues à $\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}$, tandis que $p u$ est analogue à $\frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}$. En Trigonométrie on introduit, en même temps que ces fonctions, celles qu'on en déduit en ajoutant à l'argument u une constante ω égale à la moitié de la période (ou de la demi-période) 2ω, et l'on pose

$$\cos\frac{\pi u}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{2\omega}(u+\omega).$$

De même, à côté de la fonction $H(u)$ construite avec les périodes $2K$ et $2iK'$, on considère les fonctions obtenues en ajou-

tant successivement à l'argument u les demi-périodes K, K' et $K + iK'$, ou, du moins, des fonctions qui ne diffèrent de celles-là que par des facteurs exponentiels simples.

En désignant par λ l'exponentielle

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')},$$

linéaire en u, on définit les fonctions H_1, Θ, Θ_1 par les égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} H_1(u) = H(u+K), \\ \Theta(u) = \dfrac{1}{i\lambda} H(u+iK'), \\ \Theta_1(u) = \dfrac{1}{\lambda} H(u+K+iK'); \end{cases}$$

les deux dernières montrent immédiatement que

$$(2)\qquad \Theta_1(u) = \Theta(u+K),$$

car, si l'on ajoute K à u, λ se reproduit multiplié par $-i$.

Voici quelques détails sur les expressions de ces fonctions par des séries.

Tout d'abord la formule

$$H_1(u) = H(u+K)$$

donne, pour définir $H_1(u)$, la série

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots + 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\cos\frac{(2n+1)\pi u}{2K} + \ldots$$

ou, en remplaçant les cosinus par des exponentielles et en remarquant que $-(2n+1) = 2(-n-1)+1$,

$$H_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\frac{i\pi u}{2K}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{K'}{K}\frac{(2n+1)^2}{4} + (2n+1)\frac{i\pi u}{2K}}.$$

On peut encore donner une autre forme à cette série en considérant l'exposant de e, qui est du second degré en $(2n+1)$, comme formé par les deux derniers termes du développement de

$$\frac{\pi}{4KK'}[u + (2n+1)iK']^2.$$

On a ainsi

$$H_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+1)iK']^2}.$$

Passons maintenant à la fonction Θ_1. On a par définition

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda} H(u+K+iK') = \frac{1}{\lambda} H_1(u+iK').$$

Or

$$H_1(u+iK') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'} - \frac{i\pi}{4K}(2u+iK')} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+2)iK']^2}.$$

Dans la nouvelle série le nombre pair $(2n+2)$ prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$; on peut le remplacer par $2n$, on trouve alors

$$\Theta_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2niK')^2},$$

série analogue à celle qui définit $H_1(u)$, mais où figure, dans le terme général, un nombre pair $2n$ à la place de $(2n+1)$.

Quand on augmente u de iK', les séries qui figurent dans les expressions de $H_1(u)$ et $\Theta_1(u)$ s'échangent l'une dans l'autre. Il en est donc de même pour $H_1(u)$ et $\Theta_1(u)$, à un facteur près provenant de l'accroissement de l'exposant de $e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}$. On vérifie ainsi les égalités suivantes qui résultent aussi des équations (1) :

$$H_1(u+iK') = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')} \Theta_1(u) = \lambda\, \Theta_1(u),$$

$$\Theta_1(u+iK') = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')} H_1(u) = \lambda\, H_1(u).$$

La série qui définit la fonction $\Theta_1(u)$ peut s'écrire en effectuant la multiplication de chaque terme du second membre par $e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}$

$$\Theta_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{ni\pi u}{K}}$$

ou, en associant les termes qui correspondent à deux valeurs de n égales et de signes contraires,

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K} + \ldots$$

Enfin, la quatrième fonction $\Theta(u)$ peut se définir au moyen de l'égalité

$$\Theta(u) = \Theta_1(u + K);$$

on a donc

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + (-1)^n 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K} + \ldots.$$

Tous ces développements sont absolument convergents pour $|q| < 1$, et uniformément convergents pour $\left|\frac{u}{K}\right|$ borné et $|q| \leqq q_1 < 1$.

Il résulte de ces développements que la fonction $H(u)$ seule est *impaire*, les trois autres sont *paires* :

$$H(-u) = -H(u), \qquad H_1(-u) = H_1(u),$$
$$\Theta(-u) = \Theta(u), \qquad \Theta_1(-u) = \Theta_1(u).$$

Observons encore que toutes les formules qu'on a obtenues restent encore valables quand on remplace respectivement u, K, K' par hu, hK, hK', h étant une constante quelconque.

77. **Zéros des fonctions H, H_1, Θ, Θ_1.** — Les zéros de $H(u)$ sont connus (n° 21, p. 30). Ceux des trois autres fonctions s'en déduisent immédiatement d'après les égalités (1) qui définissent ces fonctions à l'aide de $H(u)$.

Les résultats sont donnés par le Tableau suivant dans lequel on a inscrit, en face de chaque fonction, l'expression générale de ses zéros et où m et n désignent des nombres entiers :

$$\begin{array}{ll} H(u), & 2mK + 2niK', \\ H_1(u), & (2m+1)K + 2niK', \\ \Theta(u), & 2mK + (2n+1)iK', \\ \Theta_1(u), & (2m+1)K + (2n+1)iK'. \end{array}$$

78. **Formules relatives à l'addition d'une période ou d'une demi-période.** — Considérons, en premier lieu, la période 2K et supposons qu'on ajoute cette période à l'argument; on a d'abord

$$H(u + 2K) = -H(u),$$

comme cela résulte des développements de $H(u)$ en série simple ou en produit simplement infini, développements qui ne dépendent que des sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi u}{2K}$.

Les égalités qui définissent, à l'aide de H, les trois autres fonctions donnent le résultat correspondant pour ces fonctions; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
H\,(u+2K) &= -H(u),\\
H_1(u+2K) &= -H_1(u),\\
\Theta\,(u+2K) &= \quad\Theta(u),\\
\Theta_1\,(u+2K) &= \quad\Theta_1(u).
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute seulement la demi-période K, on a d'abord, par définition,

$$H(u+K) = H_1(u), \qquad \Theta(u+K) = \Theta_1(u),$$

et, en tenant compte des résultats précédents, on trouve

$$H_1(u+K) = -H(u), \qquad \Theta_1(u+K) = \Theta(u).$$

Réunissons ces formules :

$$\begin{aligned}
H\,(u+K) &= \quad H_1(u),\\
H_1(u+K) &= -H(u),\\
\Theta\,(u+K) &= \quad\Theta_1(u),\\
\Theta_1\,(u+K) &= \quad\Theta(u).
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la période $2iK'$. Les résultats s'obtiennent aisément pour Θ_1 et H_1 en se servant des développements

$$\Theta_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2niK')^2},$$

$$H_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+1)iK']^2}.$$

Si l'on augmente de $2iK'$ l'argument, chacune des fonctions Θ_1, H_1 se reproduit multipliée par le même facteur que l'exponentielle

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

Désignons par μ ce multiplicateur, c'est-à-dire posons

$$\mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')};$$

nous aurons

$$\Theta_1(u+2iK') = \mu\,\Theta_1(u), \qquad H_1(u+2iK') = \mu\,H_1(u).$$

Pour passer de là aux fonctions Θ et H, il suffit de diminuer l'argument de K dans les formules précédentes : $\Theta_1(u)$ et $\mathrm{H}_1(u)$ deviennent respectivement $\Theta(u)$ et $\mathrm{H}(u)$, μ se reproduit multiplié par $e^{i\pi}$, c'est-à-dire -1, et il vient

$$\Theta(u+2i\mathrm{K}') = -\mu\,\Theta(u), \qquad \mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}') = -\mu\,\mathrm{H}_1(u).$$

Réunissons ces formules :

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(u+2i\mathrm{K}') &= \mu\,\Theta_1(u),\\ \mathrm{H}_1(u+2i\mathrm{K}') &= \mu\,\mathrm{H}_1(u),\\ \Theta(u+2i\mathrm{K}') &= -\mu\,\Theta(u),\\ \mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}') &= -\mu\,\mathrm{H}(u), \end{aligned}\right\} \qquad \mu = e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')}.$$

Si l'on ajoute la demi-période $i\mathrm{K}'$, nous avons vu (n° 76) que les fonctions Θ_1, H_1 s'échangent à un facteur près λ défini par

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')} ;$$

λ est le multiplicateur de l'exponentielle $e^{-\frac{\pi}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}u^2}$ correspondant à l'accroissement $i\mathrm{K}'$ de l'argument u.

Si, dans les formules ainsi obtenues, on retranche K de l'argument, et si l'on remarque que λ se reproduit multiplié par i, on trouve les formules correspondantes pour Θ et H. On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(u+i\mathrm{K}') &= \lambda\,\mathrm{H}_1(u),\\ \mathrm{H}_1(u+i\mathrm{K}') &= \lambda\,\Theta_1(u),\\ \Theta(u+i\mathrm{K}') &= i\lambda\,\mathrm{H}(u),\\ \mathrm{H}(u+i\mathrm{K}') &= i\lambda\,\Theta(u), \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')}.$$

Enfin, si l'on veut ajouter la demi-période $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, il suffit dans les formules précédentes d'ajouter K à l'argument, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= i\lambda\,\mathrm{H}(u),\\ \mathrm{H}_1(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= -i\lambda\,\Theta(u),\\ \Theta(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= \lambda\,\mathrm{H}_1(u),\\ \mathrm{H}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= \lambda\,\Theta_1(u), \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')}.$$

79. Addition d'un nombre entier de périodes. — Supposons d'abord que l'on ajoute $2n\,\mathrm{K}$ à l'argument ; cela revient à ajouter n fois successivement $2\,\mathrm{K}$, et, comme le signe de la fonction peut

seul changer, le résultat se déduit immédiatement des formules relatives à l'addition de $2K$.

Supposons maintenant qu'on ajoute $2miK'$, on pourrait encore ajouter successivement m fois $2iK'$; mais on peut obtenir de suite le résultat en remarquant que chacune des fonctions Θ_1 et H_1 est égale (n° 76) à une fonction admettant la période $2iK'$ multipliée par l'exponentielle

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

D'après cela,

$$H_1(u+2miK') = e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')} H_1(u),$$

$$\Theta_1(u+2miK') = e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')} \Theta_1(u);$$

en remplaçant dans ces formules u par $u-K$, on trouve

$$H(u+2miK') = (-1)^m e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')} H(u),$$

$$\Theta(u+2miK') = (-1)^m e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')} \Theta(u).$$

Enfin, on démontrerait de même

$$H_1[u+(2m+1)iK'] = e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']} \Theta_1(u),$$

$$\Theta_1[u+(2m+1)iK'] = e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']} H_1(u),$$

$$H[u+(2m+1)iK'] = (-1)^m i e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']} \Theta(u),$$

$$\Theta[u+(2m+1)iK'] = (-1)^m i e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']} H(u).$$

80. Développements de H_1, Θ, Θ_1 en produits infinis simples. — Ces développements se déduisent du développement de $H(u)$ obtenu plus haut par l'intégration de la série de cotangentes qui donne $Z(u)$. Nous avons trouvé (n° 74)

$$H(u) = C \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).$$

Cherchons d'abord le développement de la fonction

$$\Theta(u) = \frac{1}{i} \sqrt[4]{q}\, e^{\frac{i\pi u}{2K}} H(u+iK').$$

Quand on ajoute iK' à l'argument u, l'exponentielle $e^{\frac{i\pi u}{K}}$ se reproduit multipliée par q; le facteur

$$\sin\frac{\pi u}{2K} = \frac{e^{\frac{i\pi u}{2K}} - e^{-\frac{i\pi u}{2K}}}{2i}$$

devient

$$\frac{1}{2i\sqrt{q}}\left(q e^{\frac{i\pi u}{2K}} - e^{-\frac{i\pi u}{2K}}\right),$$

et l'on obtient

$$\Theta(u) = -\frac{C}{2\sqrt[4]{q}}\left(q e^{\frac{i\pi u}{K}} - 1\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n-1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).$$

Si l'on fait entrer dans le produit le premier facteur, on voit que les facteurs contenant $e^{\frac{i\pi u}{K}}$ sont de la forme $1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}$, où n varie de o à ∞, et les facteurs contenant $e^{-\frac{i\pi u}{K}}$ de la forme $1 - q^{2n+1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}$, où n varie également de o à ∞. On a donc, en posant pour abréger $\frac{C}{2\sqrt[4]{q}} = A$:

$$\begin{aligned}\Theta(u) &= A\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n+1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right)\\ &= A\left(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{K} + q^6\right)\ldots\end{aligned}$$

Les développements en produits de H_1 et de Θ_1 s'obtiennent immédiatement en changeant u en $u + K$ dans les développements ci-dessus de H et de Θ.

Le facteur A n'est pas arbitraire puisque, dans les développements en séries trigonométriques des fonctions H, H_1, Θ, Θ_1, les coefficients sont complètement déterminés. Ainsi, en identifiant les développements de Θ_1 en produit et en série, on doit avoir, quel que soit x,

$$\begin{aligned}&A(1 + 2q\cos 2x + q^2)(1 + 2q^3\cos 2x + q^6)\ldots\\ &\quad = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots\end{aligned}$$

On aurait une première expression de A en faisant $x = 0$ dans

cette identité. Jacobi a montré que l'expression ainsi obtenue peut être remplacée par la suivante :

$$A = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\ldots.$$

Nous admettrons ici ce résultat. On verra, dans la Note V placée à la fin du Volume, comment on peut transformer le produit infini pour obtenir la série trigonométrique et comment se présente, dans ce calcul, l'expression de A donnée par Jacobi.

Nous réunissons ici les développements en produits simplement infinis des quatre fonctions. En posant

$$A = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\ldots,$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}u}{\pi}\right) = A\, 2\sqrt[4]{q}\,\sin u(1 - 2q^2\cos 2u + q^4)(1 - 2q^4\cos 2u + q^8)\ldots,$$

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{2\mathrm{K}u}{\pi}\right) = A\, 2\sqrt[4]{q}\,\cos u(1 + 2q^2\cos 2u + q^4)(1 + 2q^4\cos 2u + q^8)\ldots,$$

$$\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}u}{\pi}\right) = A(1 - 2q\cos 2u + q^2)(1 - 2q^3\cos 2u + q^6)\ldots.$$

$$\Theta_1\left(\frac{2\mathrm{K}u}{\pi}\right) = A(1 + 2q\cos 2u + q^2)(1 + 2q^3\cos 2u + q^6)\ldots.$$

Ces produits sont absolument convergents pour $|q| < 1$ et uniformément convergents pour $|q| \leqq q_1 < 1$, et $|u|$ borné.

81. Relation $\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{H}'(0) = \mathrm{H}_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0)$. — Cette relation, sur laquelle nous aurons à nous appuyer, se vérifie très simplement à l'aide des développements en produits infinis qui précèdent, en suivant une méthode donnée par Hermite (voir *Note sur la théorie des fonctions elliptiques*, à la fin du *Cours de Calcul différentiel et intégral* de J.-A. Serret, 4^e éd., t. II, Paris, 1894, p. 791 et 798).

On a immédiatement

$$\mathrm{H}_1(0) = 2\sqrt[4]{q}\,AP^2,$$
$$\Theta(0) = AQ^2,$$
$$\Theta_1(0) = AR^2,$$

en posant pour abréger

$$P = (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6)\ldots.$$
$$Q = (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5)\ldots,$$
$$R = (1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5)\ldots,$$

les produits infinis étant uniformément convergents pour

$$|q| \leq q_1 < 1.$$

D'après la relation suivante due à Euler

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdots$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}\cdots,$$

on voit que l'on a

$$PR = \frac{1}{Q}$$

ou bien

$$PQR = 1.$$

D'après cela,

$$H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0) = 2\sqrt[4]{q}A^3.$$

Calculons maintenant $H'(0)$ en regardant $H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right)$ comme un produit de deux facteurs dont l'un serait $\sin u$; nous trouverons

$$\frac{2K}{\pi}H'(0) = A\,2\sqrt[4]{q}(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots = 2\sqrt[4]{q}A^3.$$

On a donc bien l'égalité qu'il s'agissait de démontrer

$$\frac{2K}{\pi}H'(0) = H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0).$$

Remarque. — Les expressions précédentes de $H_1(0)$, $\Theta_1(0)$, $\Theta(0)$ montrent que $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, définies plus loin (n° 85), sont des fonctions uniformes de la variable $\tau = \frac{K'}{K}$; en s'appuyant sur la convergence uniforme des produits P, Q, R ainsi que sur la relation $PQR = 1$, on verra que ce sont des fonctions de q holomorphes pour toutes les valeurs de q dont le module est moindre que 1.

Observons encore que si l'on remplace (n° 76) u par hu, K et K' par hK et hK', $H_1(0)$, $\Theta(0)$ et $\Theta_1(0)$ ne changeront pas, tandis que $H'(0)$ sera remplacé par $h^{-1}H'(0)$. L'égalité que nous avons établie ne sera donc pas modifiée.

82. Formules relatives à l'échange de K et K'. — Dans la notation de Weierstrass (*voir*, par exemple, n° 56) nous avons vu que

les fonctions $\sigma(iu \mid \omega, \omega')$, $p(iu \mid \omega, \omega')$ peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right), \qquad p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right).$$

Comme actuellement nous posons

$$\omega = K, \qquad \omega' = iK',$$

on a

$$\frac{\omega'}{i} = K', \qquad i\omega = iK;$$

on passe donc des premières fonctions aux deuxièmes en permutant K et K'. Nous allons établir des formules du même genre pour les fonctions de Jacobi.

Convenons de désigner par $H(u \mid K, iK')$ la fonction H construite comme plus haut avec les deux périodes $2K$ et $2iK'$. Cette fonction s'exprime d'une manière simple à l'aide de la fonction H construite avec les périodes $2K'$ et $2iK$, $H(u \mid K', iK)$. Comme on a supposé la partie réelle de $\frac{K'}{K}$ positive, il en est de même de la partie réelle de $\frac{K}{K'}$; la quantité

$$q_0 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

a donc un module plus petit que l'unité, et la fonction $H(u \mid K', iK)$ est

$$H(u \mid K', iK) = 2\sqrt[4]{q_0}\sin\frac{\pi u}{2K'} - 2\sqrt[4]{q_0^9}\sin\frac{3\pi u}{2K'} + \ldots.$$

Cette dernière fonction vérifie les deux relations

$$H(u + 2K' \mid K', iK) = -H(u \mid K', iK),$$

$$H(u + 2iK \mid K', iK) = -e^{-\frac{i\pi}{K'}(u+iK)} H(u \mid K', iK),$$

obtenues en échangeant K et K' dans les formules relatives à l'addition d'une période, vérifiées par la fonction $H(u)$ ou $H(u \mid K, iK')$.

Ceci posé, dans le produit

$$e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(u \mid K, iK'),$$

analogue à ceux que nous avons considérés déjà à propos de H_1

et de Θ_1, remplaçons u par iu; soit $f(u)$ la fonction ainsi obtenue

$$f(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(iu \mid K, iK').$$

On vérifie aisément les deux égalités suivantes, conséquences des relations fondamentales de la fonction H,

$$(4)\quad \begin{cases} f(u+2K') = -f(u), \\ f(u+2iK) = -e^{-\frac{i\pi}{K'}(u+iK)} f(u). \end{cases}$$

Ces relations sont identiques à celles que vérifie $H(u \mid K', iK)$. En outre, les deux fonctions $f(u)$ et $H(u \mid K', iK)$ ont les mêmes zéros, savoir les valeurs de u données par la formule

$$iu = 2mK + 2niK',$$

ou bien

$$u = -2miK + 2nK',$$

m et n désignant des nombres entiers.

D'après cela, le rapport

$$\frac{f(u)}{H(u \mid K', iK)}$$

est une fonction doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ et, d'autre part, cette fonction est partout finie : elle se réduit donc à une constante. Désignons cette constante par Bi. Nous avons l'identité

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(iu \mid K, iK') = Bi\, H(u \mid K', iK);$$

on en déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta(iu \mid K, iK') &= B\, H_1(u \mid K', iK), \\
e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta_1(iu \mid K, iK') &= B\, \Theta_1(u \mid K', iK), \\
e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H_1(iu \mid K, iK') &= B\, \Theta(u \mid K', iK).
\end{aligned}$$

Il suffit pour cela de remplacer dans la première de ces identités u par $u+K'$, dans la deuxième u par $u+iK$, dans la troisième u par $u+K'$, en se reportant aux formules du n° 78 et à celles qu'on en déduit par l'échange de K et K'.

Quant à la constante B, on démontrerait, en différentiant les

formules précédentes, et en se servant de la relation du n° 81, qu'elle est égale à $\sqrt{\frac{K}{K'}}$. D'ailleurs le signe du radical doit être choisi de telle sorte que sa partie réelle soit positive : car, d'après la troisième formule, il en est bien ainsi pour $u=0$, $K'=K$, et, d'autre part, la partie réelle de B ne peut jamais s'annuler.

83. **Principales notations usitées pour les fonctions de Jacobi.** — Weierstrass emploie les notations suivantes, reproduites dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Halphen (t. I, Chap. VIII) :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(v) &= 2\sqrt[4]{q}\,\sin\pi v - 2\sqrt[4]{q^9}\,\sin 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\sin 5\pi v - \ldots,\\
\mathfrak{I}_2(v) &= 2\sqrt[4]{q}\,\cos\pi v + 2\sqrt[4]{q^9}\,\cos 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\cos 5\pi v + \ldots,\\
\mathfrak{I}_3(v) &= 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + 2q^9\cos 6\pi v + \ldots,\\
\mathfrak{I}_0(v) &= 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v - \ldots,
\end{aligned}$$

où

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}.$$

On a seulement conservé ici la lettre q au lieu de la lettre h qu'emploie Weierstrass pour désigner $e^{i\pi\tau}$.

La correspondance entre les deux notations est donnée par

$$\begin{aligned}
H(u) &= \mathfrak{I}_1\left(\frac{u}{2K}\right),\\
H_1(u) &= \mathfrak{I}_2\left(\frac{u}{2K}\right),\\
\Theta_1(u) &= \mathfrak{I}_3\left(\frac{u}{2K}\right),\\
\Theta(u) &= \mathfrak{I}_0\left(\frac{u}{2K}\right).
\end{aligned}$$

Tannery et Molk (*Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, t. II, p. 14) modifient la notation précédente en remplaçant l'indice 0 par l'indice 4.

Jacobi, dans ses Leçons (*Jacobi's gesammelte Werke*, t. I, p. 497), met $\mathfrak{I}_\alpha(u, q)$ où l'on mettrait, avec la notation de Weierstrass, $\mathfrak{I}_\alpha\left(\frac{u}{\pi}\right)$ et supprime l'indice 0. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, p. 114) désignent les périodes $2K$ et $2iK'$ par ω et ω'; ils emploient d'autres nota-

tions reliées à celles de Jacobi et à celles de Weierstrass par les formules

$$\theta_1(u) = \vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right) = H(u),$$

$$\theta_2(u) = \vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right) = H_1(u),$$

$$\theta_3(u) = \vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right) = \Theta_1(u),$$

$$\theta(u) = \vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right) = \Theta(u).$$

84. **Relations entre les σ et les ϑ.** — Ces relations sont :

$$\sigma u = \frac{H(u)}{H'(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_1 u = \frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} e^{-\eta u} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2 u = \frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3 u = \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma u &= 2\omega\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)},\\ e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_1 u &= \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)},\\ e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_2 u &= \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)},\\ e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_3 u &= \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}. \end{aligned}\right. \qquad v = \frac{u}{2\omega},$$

La première de ces relations a été démontrée (n° 21). Les autres s'en déduisent en tenant compte des formules relatives à l'addition d'une demi-période, et en remarquant que σ_1, σ_2, σ_3 deviennent égales à 1 pour $u = 0$.

II. — Fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

85. **Définitions.** — Si l'on compare les multiplicateurs des fonctions $H(u)$ et $\Theta(u)$ qui correspondent à la période $2K$, puis

à la période $2iK'$, on voit que les premiers sont égaux et de signes contraires, les derniers égaux et de même signe; il en résulte que le quotient $\frac{H(u)}{\Theta(u)}$ admet pour les mêmes périodes les multiplicateurs -1 et $+1$.

Jacobi a été conduit à considérer les quotients des fonctions H, H_1, Θ_1 par la fonction Θ. Posons

$$\operatorname{sn} u = A \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = B \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u = C \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

(On lit les premiers membres s, n, u, puis c, n, u, puis enfin d, n, u en énonçant successivement les trois lettres.) Déterminons les facteurs constants A, B, C, de manière que les trois fonctions prennent la valeur 1, la première pour $u = K$, les deux autres pour $u = 0$; nous aurons les égalités suivantes de définition :

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

La fonction $\operatorname{sn} u$ est seule *impaire;* les deux autres sont paires :

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u.$$

Cela résulte de ce que $H(u)$ seule est impaire (n° 76).

86. Addition d'une période ou d'une demi-période. — Les formules relatives aux fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u+2iK') &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u, & \operatorname{cn}(u+2iK') &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u, & \operatorname{dn}(u+2iK') &= -\operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

puis

$$\operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+K) = \frac{-k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{ik \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u+iK') = \frac{\operatorname{cn} u}{i \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+K+iK') = \frac{k'}{ik \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = \frac{ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

87. **Construction, à l'aide des fonctions** sn, cn, dn, **de fonctions elliptiques aux périodes** 2ω **et** $2\omega'$ **ou** $2K$ **et** $2iK'$. — Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ n'admettent pas les deux périodes $2K$ et $2iK'$; par exemple $\operatorname{sn} u$ change de signe quand u augmente de $2K$. Mais il est aisé de construire avec ces fonctions des fonctions elliptiques admettant ces deux périodes : telles sont, par exemple, les deux fonctions

$$\operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

et, en général, toute fonction rationnelle de ces deux fonctions.

Inversement, nous verrons plus loin que toute fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2iK'$ peut s'exprimer rationnellement à l'aide de ces deux fonctions.

Avec les fonctions de Jacobi on peut donc, tout comme avec les fonctions p et p', construire toutes les fonctions elliptiques aux périodes $2K$ et $2iK'$.

88. **Périodicité; zéros; pôles des fonctions** sn, cn, dn. — Les périodes des trois fonctions se déduisent immédiatement des relations (1) :

$\operatorname{sn} u$ admet les deux périodes	....	$4K$ et	$2iK'$,
$\operatorname{cn} u$ »	....	$4K$ et	$2K+2iK'$,
$\operatorname{dn} u$ »	....	$2K$ et	$4iK'$,

et ces trois couples de périodes définissent (aux translations près)

trois parallélogrammes élémentaires *différents* P_1, P_2, P_3 correspondant respectivement à $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Les *zéros* de ces fonctions sont respectivement ceux de $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$ à savoir :

Zéros de	$\operatorname{sn} u$..................	$2mK + 2niK'$
»	$\operatorname{cn} u$..................	$(2m+1)K + 2niK'$
»	$\operatorname{dn} u$..................	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$

ce sont tous des zéros *simples*.

Les *pôles* des trois fonctions sont les mêmes : ce sont les zéros du dénominateur commun $\Theta(u)$.

Pôles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ .... $2mK + (2n+1)iK'$.

Ces pôles sont simples.

Si l'on construit le réseau des parallélogrammes P ayant pour sommets les points

$$u_0 + 2mK + 2niK',$$

chacune des trois fonctions a un pôle et un zéro dans chaque parallélogramme.

Mais, si l'on considère chacune des trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ dans le parallélogramme élémentaire (P_1, P_2 ou P_3) qui lui correspond, on vérifiera aisément que l'ordre (n[os] 38, 42) de chacune de ces fonctions est égal à *deux*.

89. **Formule d'addition préliminaire.** — Nous obtiendrons immédiatement les formules que nous avons en vue, en appliquant les théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques, précédemment établis.

Considérons les deux fonctions

$$(5)\qquad \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha),\quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha,$$

où α désigne une constante. Ces deux fonctions sont doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2iK'$. Elles sont chacune du second ordre, car elles admettent dans un parallélogramme P des périodes deux pôles simples, à savoir les zéros du produit

$$\Theta(u)\Theta(u-\alpha),$$

dont chaque facteur a un seul zéro dans un parallélogramme. Les

fonctions (5) ont donc deux zéros dans un parallélogramme P des périodes; ces deux zéros s'aperçoivent immédiatement : ce sont les points homologues de $u = 0$ et $u = \alpha$. En effet, chacune des deux fonctions s'annule pour ces valeurs de u.

Les deux fonctions doublement périodiques (5), ayant mêmes zéros et mêmes infinis, ne diffèrent que par un facteur constant; on a donc

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha = A \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha),$$

A désignant un facteur constant. Ce facteur se détermine en faisant $u = K$; il vient alors

$$-\operatorname{cn}\alpha = A\frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha}, \qquad A = -\operatorname{dn}\alpha.$$

En remplaçant A par cette valeur dans l'identité précédente, on obtient la formule suivante d'où nous déduirons toutes les autres formules d'addition :

$$(6) \qquad \operatorname{cn}\alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha)\operatorname{dn}\alpha.$$

90. **Relations entre les fonctions** $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — En faisant, dans la formule ci-dessus (6), $\alpha = 0$, on trouve

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1.$$

Dans cette formule remplaçons u par $u + iK'$. En tenant compte des égalités

$$\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{ik \operatorname{sn} u},$$

il vient

$$\frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 u} - \frac{\operatorname{dn}^2 u}{k^2 \operatorname{sn}^2 u} = 1,$$

ou enfin

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \sin^2 u = 1.$$

Ainsi deux des trois fonctions $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$ peuvent s'exprimer linéairement en fonction de la troisième. On a, par exemple,

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u,$$
$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

91. **Module. Module complémentaire.** — Dans la relation

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1,$$

faisons $u = \mathrm{K}$; on a d'abord $\mathrm{sn}\,\mathrm{K} = 1$, puis la relation

$$\mathrm{dn}(u + \mathrm{K}) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$$

donne $\mathrm{dn}\,\mathrm{K} = k'$, et l'on est conduit à cette conséquence

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

le nombre k s'appelle le *module*, le nombre k', le *module complémentaire*.

92. Formules d'addition pour $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ **et** $\mathrm{dn}\,u$. — Dans la formule (6) posons $\alpha = -v$, puis, dans le résultat ainsi obtenu, échangeons v et u; nous trouvons

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+v) + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v) = \mathrm{cn}\,v, \\ \mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v) = \mathrm{cn}\,u. \end{cases}$$

Ces deux égalités vont nous donner $\mathrm{sn}(u+v)$ et $\mathrm{cn}(u+v)$ exprimés à l'aide de fonctions dont l'argument est u ou v.

En les résolvant par rapport à $\mathrm{sn}(u+v)$, il vient

$$(8) \qquad \mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}.$$

On a ainsi une formule d'addition algébrique pour la fonction $\mathrm{sn}\,u$. On l'écrit ordinairement sous une autre forme. Dans le second membre le numérateur s'obtient de suite en fonction de $\mathrm{sn}\,u$ et de $\mathrm{sn}\,v$ en remplaçant $\mathrm{cn}^2 u$ et $\mathrm{cn}^2 v$ par $1 - \mathrm{sn}^2 u$ et $1 - \mathrm{sn}^2 v$; le dénominateur est une fonction irrationnelle de ces mêmes quantités. Si nous multiplions les deux termes par la quantité conjuguée du dénominateur, nous trouvons

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{(\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 u)\,\{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v\}}{\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v}.$$

Le dénominateur est une fonction entière de $\mathrm{sn}^2 u$ et $\mathrm{sn}^2 v$ qui s'annule pour $u = v$; il doit donc contenir en facteur $\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v$. On a en effet

$$\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v = (\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 u)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v);$$

alors le facteur $\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 u$ disparaît et il reste

$$(9) \qquad \mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Formule d'addition pour cn u. — On obtient de même cn$(u+v)$, en éliminant sn$(u+v)$ entre les deux équations (7). Effectuons le calcul : nous trouvons successivement

$$\mathrm{cn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v};$$

$$\mathrm{cn}(u+v)=\frac{\{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\}\{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v\}}{\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u-\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v}.$$

Dans le second membre le numérateur développé est

$$\{\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u-\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v\}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v(\mathrm{cn}^2 u-\mathrm{cn}^2 v)$$

ou

$$(\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2 u)\{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\};$$

le dénominateur, on l'a vu, peut s'écrire

$$(\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2 u)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v).$$

On a donc enfin

$$\mathrm{cn}(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{10}$$

Formule d'addition pour dn u. — La formule (6)

$$\mathrm{cn}\,\alpha=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u-\alpha)+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\alpha)\,\mathrm{dn}\,\alpha$$

devient, en posant $\alpha=u+v$,

$$\mathrm{cn}(u+v)=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v).$$

Cette relation donne dn$(u+v)$ en fonction de cn$(u+v)$: en y remplaçant cn$(u+v)$ par l'expression (10) que nous venons de trouver, elle donne, après des réductions évidentes,

$$\mathrm{dn}(u+v)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \tag{11}$$

On a ainsi les formules d'addition pour les trois fonctions sn, cn, dn.

Autres formules. — Changeant dans ces formules v en $-v$, on en déduit les expressions de sn$(u-v)$, cn$(u-v)$, dn$(u-v)$.

On a, par exemple,

$$\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v-\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v};$$

d'où, en retranchant de $\operatorname{sn}(u+v)$,

$$(12)\qquad \operatorname{sn}(u+v)-\operatorname{sn}(u-v)=\frac{2\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},$$

formule qui va nous servir à trouver la dérivée de $\operatorname{sn}u$.

93. **Dérivées des fonctions** $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$. **Multiplicateur.** — Pour avoir la dérivée de $\operatorname{sn}u$, il faut chercher la limite de $\frac{\operatorname{sn}(u+h)-\operatorname{sn}u}{h}$ pour $h=0$. Pour cela transformons le numérateur comme on le fait dans la recherche de la dérivée du sinus, en nous servant de la formule (12). Dans cette formule remplaçons u par $u+\frac{h}{2}$ et v par $\frac{h}{2}$, cela donne

$$\frac{\operatorname{sn}(u+h)-\operatorname{sn}u}{h}=\frac{\operatorname{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\frac{\operatorname{cn}\left(u+\frac{h}{2}\right)\operatorname{dn}\left(u+\frac{h}{2}\right)}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{h}{2}\operatorname{sn}^2\left(u+\frac{h}{2}\right)}.$$

Appelons g la limite du rapport $\frac{\operatorname{sn}u}{u}$ quand u tend vers zéro : alors $\frac{\operatorname{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers g, et l'on trouve, pour $h=0$,

$$\frac{d\operatorname{sn}u}{du}=g\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.$$

Le nombre g se nomme *multiplicateur*.

94. **Expression du multiplicateur en fonction des périodes. Choix de périodes** $2K$ **et** $2iK'$ **telles que le multiplicateur soit égal à l'unité.** — Nous avons à chercher la limite de $\frac{\operatorname{sn}u}{u}$ quand u tend vers zéro. D'après la définition de $\operatorname{sn}u$, on a

$$\frac{\operatorname{sn}u}{u}=\frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)}\,\frac{\frac{H(u)}{u}}{\Theta(u)};$$

or la limite de $\dfrac{H(u)}{u}$ est égale à $H'(o)$ et nous avons démontré (n° 81) la relation

$$\frac{2K}{\pi} H'(o) = H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o).$$

On a donc

$$g = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)} \frac{H'(o)}{\Theta(o)},$$

et cette expression se simplifie, si l'on remplace $H'(o)$ par sa valeur tirée de la relation que nous venons de rappeler : g est alors donné par l'égalité

$$\frac{2Kg}{\pi} = \Theta_1^2(o).$$

Jusqu'ici les périodes $2K$ et $2iK'$ ont été prises arbitrairement et avec le même degré de généralité que les périodes 2ω et $2\omega'$ auxquelles elles sont respectivement identiques (n° 72). Or, remplaçons (n° 76), u par gu, ω et ω' par $g\omega$ et $g\omega'$; $H_1(o)$, $\Theta(o)$ et $\Theta_1(o)$ ne changeront pas, tandis que $H'(o)$ sera multiplié par g^{-1} (n° 81) : g sera donc remplacé par l'unité. Il en résultera que la nouvelle période $2K(=2g\omega)$ vérifiera la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(o) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Et, puisque le multiplicateur g est égal à 1, l'équation qui donne la dérivée de $\operatorname{sn} u$ deviendra

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

A l'avenir, à moins de mention du contraire, K et K' ne seront plus des quantités indépendantes : elles seront assujetties à vérifier la condition ci-dessus.

95. **Dérivées successives.** — En différentiant les expressions de $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$, savoir

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u,$$
$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

on trouvera les dérivées de $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Les dérivées des trois fonctions sont données par les formules

$$\frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

On peut aisément, en partant de ces formules, calculer les dérivées successives de l'une des trois fonctions. On trouvera par exemple, pour les dérivées de $\operatorname{sn} u$, des expressions de la forme

$$\frac{d^{2p}}{du^{2p}}(\operatorname{sn} u) = (A_0 + A_1 \operatorname{sn}^2 u + A_2 \operatorname{sn}^4 u + \ldots + A_p \operatorname{sn}^{2p} u) \operatorname{sn} u,$$

$$\frac{d^{2p+1}}{du^{2p+1}}(\operatorname{sn} u) = (a_0 + a_1 \operatorname{sn}^2 u + a_2 \operatorname{sn}^4 u + \ldots + a_p \operatorname{sn}^{2p} u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

les coefficients étant des polynomes en k.

96. **Développements en séries entières.** — En appliquant la formule de Maclaurin aux trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ et en faisant $\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$, on trouve

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2+3)\frac{u^5}{1.2.3.4.5} - 8k^3(\alpha^3+33\alpha)\frac{u^7}{1.2\ldots7} + \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1+4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - (1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{1.2\ldots6} + \ldots,$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2u^2}{1.2} + k^2(4+k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{1.2\ldots6} + \ldots;$$

mais on observera que ces développements ne sont valables que si le module de u est moindre que la distance de l'origine à celui des zéros de $\Theta(u)$ qui en est le plus rapproché (n^{os} 4 et 88). On voit qu'en négligeant u^4, $\operatorname{cn} u$ peut être remplacé par $\cos u$ et $\operatorname{dn} u$ par $\cos ku$; de plus, en négligeant u^5, on peut remplacer $\operatorname{sn} u$ par

$$\frac{\sin\left(u\sqrt{1+k^2}\right)}{\sqrt{1+k^2}}.$$

97. **Dérivées des fonctions inverses. Première idée de l'inversion à l'aide des fonctions de Jacobi.** — De même qu'en Trigonométrie les dérivées de $\sin u$ et $\cos u$ conduisent à celles des fonc-

tions inverses $\arcsin x$ et $\arccos x$, les résultats précédents nous fournissent les dérivées des fonctions inverses de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Soit par exemple

$$x = \operatorname{sn} u \;; \tag{13}$$

cette équation résolue par rapport à u donne, pour u, deux valeurs dans un parallélogramme P_1 (n° 88) construit avec les périodes $4K$ et $2iK'$, car la fonction $\operatorname{sn} u$ admet P_1 pour parallélogramme des périodes, et elle est du second ordre.

L'une de ces valeurs étant appelée u, l'autre est $2K - u$; car

$$\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u;$$

ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème de Liouville (n° 39).

Les racines de l'équation (13) forment donc une double suite de valeurs

$$u + 4mK + 2niK', \qquad 2K - u + 4mK + 2niK',$$

m et n désignant des entiers.

Nous désignerons plus spécialement par u celle de ces valeurs qui, suivie par continuité, s'annule avec x et nous l'appellerons

$$u = \arg \operatorname{sn} x \tag{14}$$

(l'égalité précédente s'énonce : u égale argument $\operatorname{sn} x$).

Nous voulons calculer $\dfrac{du}{dx}$. Or (13) donne

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \tag{15}$$

Telle est la dérivée de $\arg \operatorname{sn} x$; elle est algébrique comme celle de $\arcsin x$. Comme u et x s'annulent en même temps, l'équation (15) donne par l'intégration

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \tag{16}$$

Inversement, si l'on est en présence d'une équation de cette

forme, il est naturel d'en conclure

$$u = \arg \operatorname{sn} x, \qquad x = \operatorname{sn} u.$$

C'est ce qu'on appelle faire *l'inversion* de l'intégrale (16). Dans toutes les applications qui suivront, nous admettrons toujours que l'inversion est possible quel que soit k : en d'autres termes, nous admettrons qu'à toute valeur de k on peut faire correspondre une valeur de q permettant de former des fonctions de Jacobi qui conduisent à une fonction sn u, de multiplicateur 1, vérifiant (16). Ce postulat, qui correspond à celui du n° 34, sera justifié au Chapitre XIII, dans la Note VI, et pour k réel, au Chapitre V (nos 111 et 112).

On trouve de même

$$\frac{d \arg \operatorname{cn} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}},$$

$$\frac{d \arg \operatorname{dn} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}.$$

L'intégrale (16) est appelée une *intégrale elliptique de première espèce, sous la forme normale de Legendre*. Nous préciserons ultérieurement les notions précédentes (Chap. VII et XIII).

98. **Dégénérescence.** — Les fonctions sn, cn, dn se réduisent à des fonctions circulaires ou exponentielles lorsque k^2 est égal à 0 ou à 1.

1° $k^2 = 0$. L'équation (16) devient alors

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

la fonction $x = \operatorname{sn} u$ devient donc $x = \sin u$. Les fonctions

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

deviennent

$$\operatorname{cn} u = \cos u, \qquad \operatorname{dn} u = 1.$$

On peut vérifier qu'alors les formules d'addition (9) et (10) se réduisent aux formules donnant $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$.

2° $k^2 = 1$. Alors on a d'après (16)

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} = \arg \operatorname{th} x,$$

d'où

$$x = \operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \operatorname{th} u;$$

puis

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$

99. **Relation entre pu et $\operatorname{sn} u$.** — La fonction $\operatorname{sn} u$ que nous voulons comparer à pu est celle dont le *multiplicateur est égal à l'unité*, de sorte que, si l'on pose

$$z = \operatorname{sn} u,$$

z satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}.$$

Alors les périodes $2K$ et $2iK'$ de la fonction $\operatorname{sn}^2 u$ ne sont pas arbitraires (n° 94). Elles doivent satisfaire à la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Au contraire, les périodes 2ω et $2\omega'$ de pu sont prises arbitrairement : on suppose seulement que dans le rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$ la partie réelle est positive.

Considérons la fonction $\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}$ où λ est une constante; cette fonction admet comme périodes $2K\lambda$ et $2iK'\lambda$. On peut déterminer λ, K, K' de façon que les périodes de $\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}$ aient des valeurs données à l'avance 2ω et $2\omega'$. Si l'on prend

$$\frac{K'}{K} = \frac{\omega'}{i\omega},$$

la quantité q est connue et la relation entre K et q déterminera K. Au moyen de l'indéterminée λ on pourra satisfaire à la condition

$$2K\lambda = 2\omega$$

et, en se reportant à la valeur de $\frac{K'}{K}$, on trouvera

$$2iK'\lambda = 2\omega'.$$

Prenons alors la fonction pu construite avec les deux périodes 2ω et $2\omega'$, et comparons-la à $\dfrac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}$, qui admet les mêmes périodes.

Dans un parallélogramme de périodes contenant le point o, ces deux fonctions ont un seul pôle, le point $u = 0$, qui est un pôle double. On a, de plus, quand u tend vers zéro,

$$\lim u^2 pu = 1, \qquad \lim \frac{u^2}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = 1.$$

Les deux fonctions, qui, d'ailleurs, sont paires, ont donc même partie principale dans le voisinage de $u = 0$ et la différence

$$pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}$$

est une fonction doublement périodique aux périodes 2ω, $2\omega'$ qui reste finie dans un parallélogramme des périodes. Elle se réduit donc à une constante C et l'on a

$$pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = C.$$

Pour déterminer la constante C, développons en série le premier membre dans le voisinage de $u = 0$. On a (n° 96)

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1 + k^2}{6} u^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1 + k^2}{6} u^2 + \ldots\right)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1 + k^2}{3} + a u^2 + \ldots$$

et, d'autre part,

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \ldots.$$

Donc

$$C = pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = - \frac{1 + k^2}{3\lambda^2} + \alpha u^2 + \ldots.$$

Faisant $u = 0$, on a $C = - \dfrac{1 + k^2}{3\lambda^2}$, d'où la relation cherchée

$$pu = - \frac{1 + k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}.$$

On sait que $y = pu$ satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3) = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

avec les conditions

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega+\omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

Calculons e_1, e_2, e_3 en fonction de k^2 et de λ; pour $u = \omega$, $\frac{u}{\lambda} = \mathrm{K}$, $\operatorname{sn}\mathrm{K} = 1$,

$$e_1 = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2};$$

pour $u = \omega'$; $\frac{u}{\lambda} = i\mathrm{K}'$, $\operatorname{sn} i\mathrm{K}' = \infty$,

$$e_3 = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2};$$

pour $u = \omega + \omega'$, $\frac{u}{\lambda} = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{1}{k}$,

$$e_2 = p(\omega+\omega') = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{k^2}{\lambda^2}.$$

Après des réductions évidentes, on trouve les égalités

$$\lambda^2 e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \qquad \lambda^2 e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \qquad \lambda^2 e_3 = -\frac{1+k^2}{3},$$

et l'on en déduit

$$\lambda^2 = \frac{1}{e_1-e_3}, \qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

$$pu = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3})}.$$

Dans le cas particulier où l'on considère la fonction pu construite avec les périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$ elles-mêmes, on a $\lambda = 1$ et la relation entre p et sn devient

$$pu = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1}{3}(k^2+1).$$

100. Théorème. — *Toute fonction elliptique aux périodes* $2\mathrm{K}$ *et* $2i\mathrm{K}'$ *est une fonction rationnelle de* $\operatorname{sn}^2 u$ *et de sa dérivée* $2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$.

En effet, nous avons démontré (n° 49) que toute fonction elliptique est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. Comme la relation ci-dessus donne

$$p'u = -\frac{2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}^4 u},$$

on voit que la fonction considérée, exprimée rationnellement en pu et $p'u$, se transforme immédiatement en une fonction rationnelle de $\operatorname{sn}^2 u$ et de sa dérivée.

Si l'on considère en général une fonction elliptique avec des périodes quelconques 2ω et $2\omega'$, elle est une fonction rationnelle de pu et $p'u$, c'est-à-dire de $\operatorname{sn}^2\frac{u}{\lambda}$ et de sa dérivée.

101. **Développements de η et de η' en séries.** — Pour avoir un développement de η en série, nous partirons de la relation entre ζu et $Z(u)$ démontrée Chapitre II, n° 21 [équation (19)] et que nous récrivons ici

$$\frac{\eta}{\omega}u = \zeta u - Z(u).$$

En prenant les dérivées des deux membres et en faisant ensuite $u = \omega'$, nous trouvons

$$\frac{\eta}{\omega} = -pu - Z'(u),$$

puis

$$\frac{\eta}{\omega} = -e_3 - Z'(\omega');$$

$Z'(\omega')$ peut s'obtenir en faisant $u = 0$ dans

$$Z'(u+\omega') = \frac{d}{du}\left[\frac{H'(u+\omega')}{H(u+\omega')}\right] = \frac{d}{du}\left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right].$$

Or, du développement en produit infini de $\Theta(u)$ obtenu au n° 80, savoir

$$\Theta(u) = A\left(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^6\right)\ldots,$$

on déduit successivement

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{\omega}\sin\frac{\pi u}{\omega}\left(\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^6}+\ldots\right),$$

$$\frac{d}{du}\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \mathrm{P}\sin\frac{\pi u}{\omega}$$
$$+\left(\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^6}+\ldots\right)\frac{2\pi^2}{\omega^2}\cos\frac{\pi u}{\omega},$$

P désignant une fonction de u qui reste finie pour $u=0$, et les dérivations étant évidemment légitimes. Donc

$$\mathrm{Z}'(\omega') = \frac{2\pi^2}{\omega^2}\sum\frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\eta}{\omega}+e_3 = -\frac{2\pi^2}{\omega^2}\sum\frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \qquad q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$$
$$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots).$$

Pour avoir le développement de η', dans l'égalité précédente, remplaçons ω et ω' par ω' et $-\omega$; $q=e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ devient $q_0=e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$; de plus, $e_3=p\omega'$ devient $e_1=p\omega$, et nous obtenons

$$\frac{\eta'}{\omega'}+e_1 = -\frac{2\pi^2}{\omega'^2}\sum\frac{q_0^n}{(1-q_0^n)^2}, \qquad q_0 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$$
$$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots).$$

102. **Exemples de décomposition en éléments simples et d'intégration.** — 1° Prenons d'abord la fonction

$$f(u) = \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 a},$$

où a est une constante qui n'est pas de la forme $2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$. Cette fonction, de périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, est du second ordre; elle admet, dans un parallélogramme défini par les périodes précédentes, deux pôles simples homologues respectivement des points $+a$ et $-a$. Le résidu A relatif au pôle $u=a$ est

$$\mathrm{A} = \lim\frac{u-a}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 a},$$

pour $u = a$. La limite de ce rapport s'obtient immédiatement en prenant la limite du rapport des dérivées

$$A = \frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}.$$

Le résidu relatif à l'autre pôle $u = -a$ est $-A$. On a donc, en appelant B une constante,

$$f(u) = A\, Z(u-a) - A\, Z(u+a) + B,$$

ou, en remplaçant A par sa valeur,

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = Z(u-a) - Z(u+a) + C,$$

C désignant une autre constante. Nous déterminons C en faisant $u = 0$, ce qui donne

$$C = -\frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + 2\, Z(a).$$

Cette valeur de C se simplifie si l'on se reporte à la définition de $\operatorname{sn} u$,

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

qui donne, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = Z(u) - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

on a donc en changeant u en a

$$C = 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

d'où la formule définitive

$$(18) \qquad \frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = Z(u-a) - Z(u+a) + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Cette même formule s'obtiendrait aussi en regardant le premier membre comme une fonction de a et en le décomposant en éléments simples.

En intégrant les deux membres par rapport à u, on a

$$\int \frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}\, du = \operatorname{Log} \frac{H(u-a)}{H(u+a)} + 2u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \text{const.}$$

De même en intégrant les deux membres de la formule (18) par rapport à a et en remarquant que $2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ est la dérivée de $\mathrm{sn}^2 a$, on a

$$\mathrm{Log}(\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u) = \mathrm{Log}\,\mathrm{H}(a-u) + \mathrm{Log}\,\mathrm{H}(a+u) - 2\,\mathrm{Log}\,\Theta(a) + \mathrm{Log}\,\mathrm{C},$$

C désignant une constante relativement à a.

On en conclut

$$\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u = \mathrm{C}\frac{\mathrm{H}(a-u)\,\mathrm{H}(a+u)}{\Theta^2(a)}$$

et, en faisant $a=0$,

$$\mathrm{C} = \Theta^2(0)\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{H}^2(u)} = \frac{1}{k}\,\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)};$$

d'où la formule définitive

$$\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u = \frac{\Theta^2(0)}{k}\,\frac{\mathrm{H}(a-u)\,\mathrm{H}(a+u)}{\Theta^2(a)\,\Theta^2(u)},$$

mettant en évidence les zéros et les pôles du premier membre.

2° Proposons-nous maintenant de décomposer en éléments simples la fonction

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u},$$

de périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, et qui admet, dans un parallélogramme des périodes, un pôle double homologue du point $u=0$. Comme, dans le domaine du point $u=0$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} + \text{fonction holomorphe},$$

on aura

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = -\mathrm{Z}'(u) + \mathrm{D}, \tag{19}$$

D désignant une constante que nous allons déterminer. Auparavant, nous changerons dans la formule (19) u en $u+i\mathrm{K}'$, en nous rappelant les relations suivantes, établies aux nos 86 et 101 :

$$\mathrm{sn}(u+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u},$$

$$\mathrm{Z}'(u+i\mathrm{K}') = \frac{d}{du}\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

D'après cela, la relation (19) devient, par changement de u

en $u+i\mathrm{K}'$,

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u = -\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \mathrm{D}.$$

Faisant, dans cette dernière formule, $u=0$ et remarquant que $\Theta'(0)=0$, car $\Theta(u)$ est paire, on a

$$\mathrm{D} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)};$$

d'où les deux formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} &= -\mathrm{Z}'(u) + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},\\ k^2 \operatorname{sn}^2 u &= -\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit par l'intégration

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = -\mathrm{Z}(u) + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \text{const.},$$

$$k^2 \int \operatorname{sn}^2 u\, du = -\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \text{const.}$$

Remarque. — La première des formules (20) peut se déduire aussi comme cas limite de la formule (18). Il suffit pour cela de diviser les deux membres de cette formule par $2a$ et de faire tendre a vers zéro.

103. **Notations d'Abel.** — Dans son premier Mémoire (*Œuvres*, édition L. Sylow et S. Lie, Christiania, 1881; t. I, p. 263), Abel a désigné par φ, f, F les fonctions sn, cn, dn. Plus tard, il a employé la lettre λ pour la fonction sn. Cette notation a été adoptée par Briot et Bouquet, qui désignent les trois fonctions sn, cn, dn par λ, μ, ν :

$$\operatorname{sn} u = \lambda(u), \qquad \operatorname{cn} u = \mu(u), \qquad \operatorname{dn} u = \nu(u).$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV.

1. Démontrer les formules suivantes, qui sont des conséquences des formules d'additions :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b) &= \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{cn}(a+b)+\operatorname{cn}(a-b) &= \frac{2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{dn}(a+b)+\operatorname{dn}(a-b) &= \frac{2\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) &= \frac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^3b},\\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) &= \frac{1}{k^2}\,\frac{\operatorname{dn}^2a\operatorname{dn}^2b-k'^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) &= \frac{k^2\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b+k'^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)+\operatorname{sn}(a-b)\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b};$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\operatorname{dn}(a-b)-\operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{sn}(a-b)} &= \frac{\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}b},\\ \frac{1+\operatorname{dn}(a-b)}{k\operatorname{sn}(a-b)} &= k\,\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}b-\operatorname{dn}a}. \end{aligned}\right.$$

2. Duplication de l'argument. — Faisant $v=u$ dans les formules d'addition et écrivant s, c, d à la place de $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, il vient

$$\operatorname{sn}2u = \frac{2scd}{1-k^2s^4},$$

$$\operatorname{cn}2u = \frac{1-2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4} = \frac{-k'^2+2k'^2c^2+k^2c^4}{k'^2+2k^2c^2-k^2c^4},$$

$$\operatorname{dn}2u = \frac{1-2k^2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4} = \frac{k'^2-2k'^2d^2+d^4}{-k'^2+2d^2-d^4}.$$

En posant $S = \operatorname{sn} 2u$, $C = \operatorname{cn} 2u$, $D = \operatorname{dn} 2u$, ces formules s'écrivent

$$\frac{1-C}{1+C} = \frac{s^2 d^2}{c^2}, \qquad \frac{1-D}{1+D} = \frac{k^2 s^2 c^2}{d^2}, \qquad \frac{D-C}{D+C} = \frac{k'^2 s^2}{c^2 d^2};$$

$$s^2 = \frac{1-C}{1+D} = \frac{1}{k^2}\,\frac{1-D}{1+C} = \ldots,$$

$$c^2 = \frac{D+C}{1+D} = \frac{k'^2}{k^2}\,\frac{1-D}{D-C} = \ldots,$$

$$d^2 = \frac{D+C}{1+C} = k'^2\,\frac{1-C}{D-C} = \ldots.$$

Faisons $u = \frac{1}{2}K$, alors $S = 1$, $C = 0$, $C = k'$; donc

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}, \qquad \operatorname{cn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \qquad \operatorname{dn}\frac{K}{2} = \sqrt{k'}.$$

3. Démontrer la formule de décomposition en éléments simples :

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)} - \frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)}\right].$$

(On peut déduire cette formule de celle du n° 102 en y remplaçant u par $u + iK'$.)

4. Vérifier que l'on a

$$-k \int \operatorname{sn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u).$$

Montrer qu'on peut de même déterminer les constantes a, b, a', b' de façon que

$$a \int \operatorname{cn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{sn} u + a' \operatorname{dn} u),$$

$$b \int \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{cn} u + b' \operatorname{sn} u).$$

(Il suffit de différentier et d'identifier.)

5. **Un cas particulier des surfaces minima.** — Un exercice intéressant pour appliquer la différentiation des fonctions elliptiques consiste à vérifier que la surface découverte par Schwarz (*Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. I, p. 77)

$$\operatorname{cn} x + \operatorname{cn} y + \operatorname{cn} z + \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y \operatorname{cn} z = 0,$$

avec le module $k = \frac{1}{2}$, est une surface minimum dont la courbure totale en chaque point est nulle, satisfaisant, par conséquent, à la condition

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

p, q, r, s, t ayant leurs significations ordinaires de dérivées partielles de z par rapport à x, y. On montre que cette condition équivaut à la suivante :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface, et l'on pose

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Le lecteur trouvera le détail du calcul de vérification dans l'Ouvrage de Greenhill sur les *Fonctions elliptiques*, p. 35; traduit par J. Griess, Carré, 1895.

6. Démontrer les relations

$$\begin{aligned}
\Theta^2(0)\ \mathrm{H}(u+a)\ \mathrm{H}(u-a) &= \Theta^2(a)\,\mathrm{H}^2(u) - \mathrm{H}^2(a)\,\Theta^2(u),\\
\Theta^2(0)\ \Theta(u+a)\ \Theta(u-a) &= \Theta^2(a)\,\Theta^2(u) - \mathrm{H}^2(a)\,\mathrm{H}^2(u),\\
&= \Theta_1^2(a)\,\Theta_1^2(u) - \mathrm{H}_1^2(a)\,\mathrm{H}_1^2(u),\\
\mathrm{H}_1^2(0)\ \Theta(u+a)\ \Theta(u-a) &= \Theta_1^2(a)\,\mathrm{H}^2(u) + \Theta^2(a)\,\mathrm{H}_1^2(u),\\
\mathrm{H}_1^2(0)\,\mathrm{H}_1(u+a)\,\mathrm{H}_1(u-a) &= \Theta_1^2(a)\,\Theta_1^2(u) - \Theta^2(a)\,\Theta^2(u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(u)\,\mathrm{H}_1(u-a) - \Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1(a)\,\mathrm{H}_1(u)\,\Theta_1(u-a)\\
&\quad = \Theta(0)\,\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}(u)\,\Theta(u-a),\\
&\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(a)\,\mathrm{H}_1(u)\,\Theta(u) + \mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}(u)\,\Theta_1(u)\\
&\quad = \Theta(0)\,\mathrm{H}_1(0)\,\mathrm{H}_1(u-a)\,\Theta(u+a).
\end{aligned}$$

(Il suffit de vérifier que, dans chacune de ces formules, le quotient d'un des membres par l'autre est une fonction de u admettant les périodes $2K$ et $2iK'$ et *restant finie* quel que soit u. Ce quotient est alors une *constante* que l'on détermine en donnant à u une valeur particulière.)

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES VALEURS RÉELLES DE $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, QUAND K ET K′ SONT RÉELS. APPLICATIONS.

Nous nous proposons, en vue des applications, de faire, pour les fonctions de Jacobi, une étude analogue à celle que nous avons faite pour pu dans le Chapitre III. Nous supposerons, comme dans ce Chapitre, que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, ce qui revient à supposer K et K′ réels. De plus, K : K′ devant être positif (n° 72), nous pourrons supposer K et K′ positifs.

I. — K ET K′ RÉELS.

104. Le module est réel et moindre que 1. — K et K′ étant réels, il en est de même de q (n° 72) et, par suite, de $H_1(o)$, $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$, (n° 80). Dès lors, k et k' sont réels et positifs (n° 85). Et, comme on a

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

le module k et le module complémentaire k' sont tous deux compris entre o et 1.

105. Argument réel. — Considérons d'abord la fonction

$$z = \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}.$$

Quand u varie en restant réel de o à K, z est réel puisque, dans les développements en séries trigonométriques de $H(u)$ et $\Theta(u)$, tout est réel; dans cet intervalle z varie d'une manière continue, puisque $\Theta(u)$ ne s'annule qu'aux points $u = 2mK + (2n+1)iK'$. De plus, la dérivée

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

garde un signe constant, puisque les fonctions $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$, $\Theta(u)$ ne s'annulent pour aucune valeur comprise entre o et K; cette dérivée est égale à 1 pour $u = 0$; donc elle est constamment positive entre o et K. La fonction $\operatorname{sn} u$ est croissante : elle est nulle pour $u = 0$, et égale à 1 pour $u = K$.

De la variation de $\operatorname{sn} u$, on déduit celle de $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$, quand u varie de o à K. En effet,

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}$$

varie de 1 à 0, et

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

varie de 1 à k'.

On conclut de là les variations des trois fonctions dans tout intervalle réel en se rappelant que $\operatorname{sn} u$ est impaire, que $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ sont paires, et que l'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 2K) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2K) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned}$$

106. **Argument de la forme $v + iK'$, v réel.** — L'égalité

$$\operatorname{sn}(v + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} v}$$

donne immédiatement la variation de $\operatorname{sn} u$ quand

$$u = v + iK'$$

et que v varie de o à K. Comme $\operatorname{sn} v$ croît de 0 à 1, $\operatorname{sn}(v + iK')$ décroît de $+\infty$ à $\frac{1}{k}$.

Les fonctions

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

sont purement imaginaires pour ces valeurs de u.

107. **Argument purement imaginaire.** — Les séries trigonométriques définissant H, Θ, H_1, Θ_1 (ou encore les formules du n° 82) montrent immédiatement que, u étant réel, $H(iu)$ est purement imaginaire; $\Theta(iu)$, $H_1(iu)$ et $\Theta_1(iu)$ sont réels. Donc, $\operatorname{sn} iu$ est purement imaginaire; $\operatorname{cn} iu$ et $\operatorname{dn} iu$ sont réels.

Pour étudier les variations de ces fonctions et mettre ces propriétés en évidence, nous nous servirons des formules du n° 82, relatives à l'échange de K et K'.

Ces formules permettent de ramener les fonctions $\operatorname{sn} iu$, $\operatorname{cn} iu$, $\operatorname{dn} iu$, construites avec les périodes $2K$ et $2iK'$, à d'autres fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, construites avec les périodes $2K'$ et $2iK$.

On a par définition

$$\operatorname{sn} u = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Transformons $\operatorname{sn} iu$ en nous servant des formules suivantes démontrées n° 82 :

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(iu \mid K, iK') = B i H(u \mid K', iK),$$
$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta(iu \mid K, iK') = B\, H_1(u \mid K', iK);$$

nous avons d'abord

$$\frac{H(iu \mid K, iK')}{\Theta(iu \mid K, iK')} = i \frac{H(u \mid K', iK)}{H_1(u \mid K', iK)},$$

puis, d'une manière analogue,

$$\frac{\Theta_1(0 \mid K, iK')}{H_1(0 \mid K, iK')} = \frac{\Theta_1(0 \mid K', iK)}{\Theta(0 \mid K', iK)},$$

et nous déduisons de là

$$\operatorname{sn}(iu \mid K, iK') = i \frac{\operatorname{sn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)},$$

en désignant par $\operatorname{sn}(u \mid K, iK')$ la fonction $\operatorname{sn} u$ construite avec les périodes $2K$ et $2iK'$, et par $\operatorname{sn}(u \mid K', iK)$ celle qui s'en déduit par l'échange de K et K'.

En raisonnant de même et en employant des notations analogues, on démontrerait les deux autres formules

$$\operatorname{cn}(iu \mid K, iK') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)},$$
$$\operatorname{dn}(iu \mid K, iK') = \frac{\operatorname{dn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)}.$$

Ainsi, quand u est réel, la fonction $\operatorname{sn} iu$ prend des valeurs

purement imaginaires, tandis que $\mathrm{cn}\,iu$ et $\mathrm{dn}\,iu$ sont réels. Il serait facile de suivre les variations de ces dernières fonctions : il suffirait pour cela d'étudier leurs variations quand u varie de o à K'. Ainsi la fonction $\mathrm{cn}(u \mid K', iK)$ varie de 1 à 0, d'après ce qu'on a vu pour les arguments réels ; donc $\mathrm{cn}(iu \mid K, iK')$ croît de 1 à $+\infty$.

108. **Argument de la forme $K + iu$, u réel.** — Prenons maintenant un argument de la forme $K + iu$ en supposant que u est réel et croît de o à K. On a d'abord

$$\mathrm{sn}(K + iu) = \frac{\mathrm{cn}\,iu}{\mathrm{dn}\,iu};$$

puis, en se servant des formules précédentes et mettant les périodes en évidence, on trouve

$$\mathrm{sn}(K + iu \mid K, iK') = \frac{1}{\mathrm{dn}(u \mid K', iK)}.$$

La fonction est donc réelle et varie d'une manière continue quand u varie de o à K', c'est-à-dire de o à la demi-période réelle de la fonction dn qui figure au dénominateur. Appelons pour un instant k_1 le module des fonctions elliptiques $\mathrm{sn}(u \mid K', iK)$, $\mathrm{cn}(u \mid K', iK)$, $\mathrm{dn}(u \mid K', iK)$: nous avons vu que, quand u varie de o à la demi-période réelle K', $\mathrm{sn}(u \mid K', iK)$ croît de o à 1, $\mathrm{dn}(u \mid K', iK)$ décroît constamment de 1 à $\sqrt{1 - k_1^2}$. Donc, quand u croît de o à K', la fonction

$$\mathrm{sn}(K + iu \mid K, iK')$$

croît constamment de 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}}$.

On peut trouver directement les valeurs extrêmes de la fonction : pour $u = 0$, elle est bien égale à 1 puisque $\mathrm{sn}\,K = 1$; quand $u = K'$, elle devient égale à $\frac{1}{k}$, comme le montre la formule

$$\mathrm{sn}(v + iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,v},$$

dans laquelle on fait $v = K$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}} = \frac{1}{k}, \qquad k_1 = \sqrt{1 - k^2} = \pm k'.$$

Le module des fonctions nouvelles $\mathrm{sn}(u \mid K', iK)$, ..., qui est positif (n° 104), est donc k'.

D'ailleurs, on peut calculer directement k_1, sans ambiguïté de signe, en s'appuyant sur les formules des nos 82 et 85, qui donnent

$$k_1 = \left[\frac{H_1(0 \mid K', iK)}{\Theta_1(0 \mid K', iK)}\right]^2 = \left[\frac{\Theta\,(0 \mid K, iK')}{\Theta_1(0 \mid K, iK')}\right]^2 = k'.$$

109. **Résumé.** — Les résultats précédents peuvent se résumer ainsi. Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires : prenons sur Ox $OA = K$, sur Oy $OB = K'$ et soit C le quatrième sommet du rectangle construit sur OA et sur OB.

Lorsque le point dont l'affixe est u décrit successivement les côtés OA, AC, CB, la valeur de sn u varie de 0 à 1, de 1 à $\frac{1}{k}$, puis de $\frac{1}{k}$ à $-\infty$:

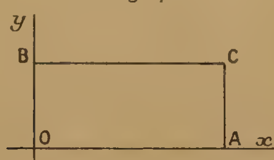
u.........	O	A	C	B
sn u.......	0	1	$\frac{1}{k}$	$+\infty$

On formerait de même pour cn u et dn u les Tableaux suivants, en supposant toujours que le point mobile parcourt les côtés du rectangle OACB :

u.........	A	O	B
cn u.......	0	1	∞

u.........	C	A	O	B
dn u.......	0	k'	1	∞

Fig. 7.



En étudiant chacune des fonctions sn u, cn u, dn u dans l'intérieur du parallélogramme de périodes P_1, P_2, P_3 qui lui correspond (no 88), on démontrerait (*cf.* no 58, *Remarque*) que les trois fonctions précédentes sont imaginaires à l'intérieur du rectangle OABC; et que les seules valeurs de u, qui rendent réelles ces fonctions, se déduisent de celles que nous venons d'indiquer par le changement de u en $-u$ et par l'addition d'expressions de la forme $mK + niK'$ (où m et n sont entiers, m étant pair pour sn u et cn u, et n étant pair pour cn u et dn u).

110. Expression des périodes par des intégrales définies. — La fonction

$$z = \operatorname{sn} u$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

qui peut s'écrire

$$du = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Quand u varie de 0 à K, z est réel et croît constamment de 0 à 1 (n° 105); on a donc

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

le radical étant pris positivement, puisque K est positif.

D'autre part, si l'on pose

$$u = K + it$$

et si l'on fait varier t de 0 à K', $\operatorname{sn} u$ croît constamment de 1 à $\frac{1}{k}$; on en déduit

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Or, en faisant le changement de variable,

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2z_1^2}},$$

l'intégrale devient

$$i\int_0^1 \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k'^2z_1^2)}};$$

K' est donc déterminé par l'égalité

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

où le radical doit être pris positivement, puisque K' doit être positif.

On voit que K' est défini à l'aide du module complémentaire k'

comme K est défini à l'aide du module k; par suite, quand on remplace k par k', on échange par là même K et K'. C'est, sous une autre forme, le résultat que nous avons déjà trouvé, quand nous avons montré que le module des fonctions $\operatorname{sn}(u \mid K', iK)$, ... est égal à k' (n° 108).

111. Relations entre K, K' et k. — Les deux quantités K et K', exprimées sous forme d'intégrales définies

$$(1) \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

où

$$k'^2 = 1 - k^2,$$

apparaissent comme des fonctions de la seule quantité k. *Elles sont donc liées par une relation*. Cette relation est celle que l'on a établie, entre K et K', pour rendre le multiplicateur

$$g = \lim_{u=0} \frac{\operatorname{sn} u}{u}$$

égal à 1. Cette relation peut s'écrire (n° 94)

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0).$$

Ainsi les fonctions K et K' de k, définies par les relations (1), vérifient cette relation.

Les fonctions sn, cn, dn, construites avec K et iK', sont donc déterminées dès que l'on connaît k. Aussi, au lieu de les écrire $\operatorname{sn}(u \mid K, iK')$, les écrit-on plus simplement $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$. Par le changement de k en k', K et K' s'échangent.

Les fonctions $\operatorname{sn}(u \mid K', iK)$, ... s'écriront donc $\operatorname{sn}(u, k')$, $\operatorname{cn}(u, k')$, $\operatorname{dn}(u, k')$. Avec ces notations, les formules établies plus haut pour l'argument purement imaginaire deviennent

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

$$\operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

Par exemple, si l'on se place dans un cas de dégénérescence (n° 98), $k=0$, on a $k'=1$, et la deuxième formule donne

$$\cos iu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

Le module k peut prendre une valeur réelle quelconque comprise entre 0 *et* 1. En effet, dans la théorie que nous venons de développer, nous avons vu que, les deux quantités réelles et positives K et K' étant choisies de façon à vérifier l'équation (2), le multiplicateur est égal à 1, et le module k donné par

$$\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}, \qquad q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}};$$

nous avons démontré ensuite que le module complémentaire k' s'obtient en permutant K et K', ce qui donne

$$\sqrt{k'} = \frac{2\sqrt[4]{q_0} + 2\sqrt[4]{q_0^9} + \ldots}{1 + 2q_0^4 + 2q_0^9 + \ldots}, \qquad q_0 = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}.$$

Quand le rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$ tend vers zéro par valeurs positives, q et k tendent vers zéro; quand ce rapport tend vers $+\infty$, q_0 et k' tendent vers 0, k vers 1; d'ailleurs, nous avons observé (n° 81, *Remarque*) que k est une fonction holomorphe de q pour $|q|<1$, et une observation analogue s'applique à k', relativement à q_0. Donc, le rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$ variant d'une façon continue de 0 à $+\infty$, k varie d'une façon continue de 0 à 1; il passe donc par toutes les valeurs positives inférieures à 1. Enfin, on peut écrire (n° 81) :

$$k' = \left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}\right)^4 = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

ce qui montre que, q croissant de 0 à 1, k' va constamment en décroissant; par suite, k va constamment en croissant, *et prend une fois et une fois seulement toute valeur k_0 comprise entre* 0 *et* 1. D'après la théorie que nous avons développée, les déterminations de K et K' qui font acquérir à k la valeur k_0 sont données par les intégrales définies (1) où l'on a remplacé k par k_0; et, si l'on désigne par $\operatorname{sn}(u, k_0)$ la fonction $\operatorname{sn} u$ de module k_0^2 que l'on vient de construire, on peut dire, dès maintenant, que le sym-

bole $\operatorname{sn}(u, k)$ a un sens parfaitement défini pour k réel et compris entre 0 et 1.

112. Inversion. — Supposons que, k étant un nombre positif moindre que 1, on ait trouvé entre u et z une relation de la forme

$$(3) \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

On calculera les demi-périodes K et iK′ par les intégrales définies (1). On construira ensuite les fonctions H, Θ, H_1, Θ_1, $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ correspondantes, et, d'après la conclusion du n° 111, on pourra écrire

$$u = \arg\operatorname{sn} z, \qquad z = \operatorname{sn} u,$$
$$\sqrt{1-z^2} = \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{1-k^2z^2} = \operatorname{dn} u.$$

Ainsi, en vertu des résultats du n° 111, le problème de l'*inversion* de l'intégrale (3) se trouve actuellement résolu en toute rigueur pour k réel et compris entre 0 et 1; c'est là un résultat essentiel pour les applications que nous traiterons dans ce Chapitre (n° 97).

113. Expression de K par une série hypergéométrique. — Dans la formule qui définit K par une intégrale définie, faisons $z = \sin\varphi$: on aura

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi.$$

Développons, par la formule du binome, la quantité sous le signe d'intégration

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} k^{2n}\sin^{2n}\varphi.$$

D'après une formule due à Wallis et facile à vérifier, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Donc enfin

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \ldots\right].$$

La série ainsi obtenue est un cas particulier de la série hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

convergente pour $|x| < 1$.

On a, en effet,

$$K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right).$$

114. Valeurs réelles de pu, dans le cas où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, rattachées à celles de $\text{sn}^2 u$. — Supposons que la fonction pu soit construite avec deux périodes 2ω et $2\omega'$ telles que ω et $\frac{\omega'}{i}$ soient réels. Nous avons étudié ce cas en détail (Chap. III). Nous pouvons, à titre d'exercice, rattacher les résultats que nous avons obtenus à ceux du présent paragraphe, en nous servant de la relation entre les fonctions p et sn. Nous avons trouvé en général (n° 99)

$$pu = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 \text{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}$$

avec

$$2K\lambda = 2\omega, \qquad 2iK'\lambda = 2\omega',$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{e_1 - e_3}, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

Dans le cas actuel, le polynome

$$4z^3 - g_2 z - g_3$$

a ses racines réelles (n° 57); le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

est positif (n° 46). De plus, $e_1 > e_2 > e_3$. Alors $\lambda^2 > 0$; la valeur de k^2 est réelle et comprise entre 0 et 1; les périodes $2K$ et $2iK'$ de la fonction $\text{sn}^2 u$ sont, la première réelle, la seconde purement imaginaire. D'après cela, quand u est réel, pu est évidemment

réelle. Nous avons vu (nº 56) que, l'argument u étant purement imaginaire, $p u$ est encore réelle; cela résulte de la formule

$$p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3).$$

Nous allons vérifier cette formule en nous servant de l'égalité qui ramène $p u$ à la fonction $\operatorname{sn}^2 u$. Cherchons l'expression de

$$p(u; g_2, -g_3).$$

Quand on change g_3 en $-g_3$ dans l'équation

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0,$$

on change les signes des trois racines e_1, e_2, e_3 ou, en précisant, si e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation précédente rangées par ordre de grandeur décroissante, les racines de l'équation

$$4y^3 - g_2 y + g_3 = 0,$$

rangées aussi par ordre de grandeur décroissante, seront

$$e'_1 = -e_3, \qquad e'_2 = -e_2, \qquad e'_3 = -e_1;$$

le carré du module de $p(u, g_2 - g_3)$ est égal à

$$\frac{e'_2 - e'_3}{e'_1 - e'_3} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

On voit que c'est le carré du complément du module de la fonction $p(u; g_2, g_3)$; le multiplicateur de $p(u; g_2, -g_3)$ est

$$\lambda'^2 = \frac{1}{e'_1 - e'_3} = \frac{1}{e_1 - e_3} = \lambda^2;$$

il est le même que pour la fonction $p(u; g_2, g_3)$.

En résumé, changer g_3 en $-g_3$ revient à changer k en k', et l'on a

$$p(u; g_2, -g_3) = -\frac{1 + k'^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda}, k'\right)},$$

et la formule à vérifier

$$p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3)$$

équivaut à celle-ci :

$$-\frac{1+k^2}{3\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{iu}{\lambda},k\right)}=\frac{1+k'^2}{3\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda},k'\right)},$$

ou, en tenant compte de la relation $k^2+k'^2=1$ et en posant $\frac{u}{\lambda}=v$,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(iv,k)}+\frac{1}{\operatorname{sn}^2(v,k')}=1;$$

or cette égalité résulte immédiatement de la formule suivante, démontrée au n° 107 :

$$\operatorname{sn}(iv,k)=\frac{i\operatorname{sn}(v,k')}{\operatorname{cn}(v,k')}.$$

Variation des valeurs réelles de pu. — Partons de la formule (n° 99)

$$pu=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)}.$$

Quand $\frac{u}{\lambda}$ croît de 0 à K, $\operatorname{sn}\frac{u}{\lambda}$ croît de 0 à 1; en même temps, u croît de 0 à ω et pu décroît de $+\infty$ à e_1.

Si l'on pose $\frac{u}{\lambda}=K+it$ et si l'on fait varier t de 0 à K′, $\operatorname{sn}^2\frac{u}{\lambda}$ varie de 1 à $\frac{1}{k^2}=\frac{e_1-e_3}{e_2-e_3}$; en même temps, on a

$$u=\omega+it_1;$$

$t_1\,(=\lambda t)$ croissant par valeurs réelles de 0 à ω', pu va constamment en décroissant, depuis e_1 jusqu'à e_2.

Si l'on pose $\frac{u}{\lambda}=iK'+t$ et si l'on fait croître t de 0 à K, $\operatorname{sn}^2\frac{u}{\lambda}$ décroît de $+\infty$ à $\frac{1}{k^2}$; en même temps, on a

$$u=\omega'+t_1;$$

t_1 croissant par valeurs réelles de 0 à ω, pu croît constamment de e_3 à e_2.

Enfin posons $u=it$, faisons croître t de 0 à $\frac{\omega'}{i}$ et servons-nous de la formule

$$p(it;\,g_2,g_3)=-p(t;\,g_2,-g_3).$$

Les périodes de la fonction écrite au second membre sont $\frac{2\omega'}{i}$ et $2i\omega$, puisqu'en changeant le signe de g_3 on échange k et k', par suite K et K'; on change donc ω et ω' en $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$. D'après cela, quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, nous sommes dans un cas déjà étudié; $p(u; g_2, -g_3)$ décroît de l'infini à la plus grande des racines de l'équation

$$4y^3 - g_2 y + g_3 = 0,$$

c'est-à-dire $-e_3$. Ainsi, t variant de o à $\frac{\omega'}{i}$, $p(t; g_2, -g_3)$ décroît de $+\infty$ à $-e_3$ et par suite $p(u; g_2, g_3)$ croît de $-\infty$ à e_3.

En résumé :

1° Quand u croît par valeurs réelles de o à ω, pu décroît de $+\infty$ à e_1;

2° Quand on a $u = \omega + it$ et que t croît par valeurs réelles de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu décroît de e_1 à e_2;

3° Quand on a $u = \omega' + t$ et que t croît par valeurs réelles de o à ω, pu croît de e_3 à e_2;

4° Quand on a $u = it$ et que t croît par valeurs réelles de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu croît de $-\infty$ à e_3.

Cette discussion a déjà été résumée au n° 59. Nous pouvons d'abord en tirer cette conclusion que *pu passe par toute valeur réelle*. D'ailleurs, comme on l'a déjà observé, l'équation

$$pu - pv = 0,$$

n'a que deux racines dans un parallélogramme des périodes, puisque le premier membre est une fonction doublement périodique admettant zéro comme pôle double et n'admettant pas d'autres pôles dans un parallélogramme des périodes qui contient zéro. Les deux racines sont évidemment, à des multiples près des périodes, égales à $+v$ et $-v$.

Nous avons ainsi retrouvé toutes les valeurs de u pour lesquelles la fonction pu est réelle.

Étude de la dérivée pour les valeurs qui rendent la fonction réelle. — D'après l'équation

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

la dérivée $p'u$ est réelle quand pu est supérieure à e_1 ou comprise entre e_2 et e_3; elle est purement imaginaire dans les autres cas. Voyons, avec plus de détails, comment se comporte la dérivée dans les cas examinés au paragraphe précédent :

1° Quand u croît de o à ω, pu décroît constamment; la dérivée est réelle et négative;

2° Quand on a $u = \omega + it$ et que t croît de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu décroît constamment, $p'u$ est purement imaginaire, la dérivée de pu par rapport à t est négative; cette dérivée est $ip'u$, ainsi $\frac{p'u}{i}$ est positive;

3° Quand on a $u = \omega' + t$ et que t croît de o à ω, pu croît constamment, $p'u$ est réelle et positive;

4° Quand on a $u = it$ et que t croît de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu croît constamment; $ip'u$ est donc réelle et positive.

Dans chacun des cas précédents, on a examiné seulement un intervalle correspondant à une demi-période. En se servant de ce que la fonction pu est paire et admet les périodes 2ω, $2\omega'$, on vérifiera sans peine le résultat suivant, se rapportant aux cas où pu est réelle :

La dérivée change de signe quand la partie réelle de u passe par un multiple de ω ou quand le coefficient de i passe par un multiple de $\frac{\omega'}{i}$.

II. — Biquadratique gauche. Surface des ondes.

115. Équations de la biquadratique. — La courbe définie par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \operatorname{sn} u, \\ y = \operatorname{cn} u, \\ z = \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

dans lesquelles u désigne un paramètre variable, est l'intersection

de deux surfaces du second degré, puisque l'on a entre x, y, z les deux relations

$$f \equiv \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi \equiv k^2 x^2 + z^2 - 1 = 0$$

et, d'autre part, on peut toujours, par une transformation homographique, ramener à cette forme les équations d'une biquadratique gauche, et cela de telle sorte que l'on ait $0 < k^2 < 1$, ce qui assure la possibilité de la représentation elliptique (1) (n° 112). Nous allons indiquer les propriétés les plus simples de cette courbe, en nous servant de la représentation paramétrique précédente.

Pour tous les raisonnements qui suivent, il importe de faire choix d'un système de périodes qui appartiennent à la fois aux trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Or, le plus simple des couples de périodes communs à ces fonctions est le couple $4K$, $4iK'$. Envisagées à ce point de vue, ce sont des fonctions elliptiques que l'on pourrait exprimer rationnellement à l'aide de la fonction $p(u \mid 2K, 2iK')$, construite avec ces mêmes périodes, et de la dérivée de cette fonction.

Soit P un parallélogramme des périodes $4K$ et $4iK'$ construit sur les deux périodes communes à $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Nous allons montrer d'abord qu'à chaque point M de la biquadratique, les relations (1) font correspondre une seule valeur de u dans le parallélogramme P. En effet, coupons la biquadratique par un plan

$$x = x_1;$$

nous obtiendrons quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, en associant à $x = x_1$ les quatre systèmes de valeurs

$$y = \pm\sqrt{1 - x_1^2}, \qquad z = \pm\sqrt{1 - k^2 x_1^2}.$$

D'autre part, l'équation $x = x_1$ donne

$$\operatorname{sn} u - x_1 = 0;$$

la fonction elliptique $\operatorname{sn} u - x_1$ ayant dans le parallélogramme P des périodes $4K$ et $4iK'$ quatre pôles simples, à savoir les pôles de $\operatorname{sn} u$, y possède quatre zéros u_1, u_2, u_3, u_4, dont les trois derniers sont les homologues respectifs de

$$2K - u_1, \quad 2iK' + u_1, \quad 2K + 2iK' - u_1;$$

si à u_1 correspond le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de la biquadratique, à u_2, u_3, u_4 correspondent respectivement les points $M_2(x_1, -y_1, z_1)$, $M_3(x_1, -y_1, -z_1)$, $M_4(x_1, y_1, -z_1)$. En définitive, à l'un quelconque des points de la biquadratique, soit M_1, correspond, dans P, une seule valeur u_1 de u : dans le plan tout entier sur lequel on figure la variable u, il correspond au point M_1 une infinité de valeurs de u données par la formule

$$u = u_1 + 4m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}'$$

(m et n entiers). On a donc une représentation paramétrique parfaite de la courbe.

Enfin on verrait, comme au n° 62, que l'une ou l'autre des formules $u_1 = \varepsilon u + a$ ($\varepsilon^2 = 1$) définit une transformation birationnelle de la biquadratique en elle-même; en s'appuyant sur les relations du n° 92, on trouvera aussitôt que cette transformation peut être écrite explicitement de la façon suivante :

$$\frac{x_1}{\varepsilon cd\,x + s\,yz} = \frac{y_1}{cy - \varepsilon sd\,zx} = \frac{z_1}{d\,z - \varepsilon k^2 sc\,xy} = \frac{1}{1 - k^2 s^2 x^2}$$

(on a posé $s = \operatorname{sn} a$, $c = \operatorname{cn} a$, $d = \operatorname{dn} a$).

116. **Forme de la courbe.** — On aperçoit immédiatement la forme de la courbe, en remarquant qu'elle est symétrique par rapport aux plans de coordonnées, et qu'elle se projette sur xOy suivant un cercle, sur xOz suivant une ellipse, sur yOz suivant une hyperbole.

Mais voyons comment il faut faire varier l'argument pour obtenir tous les points réels de la courbe; x et y étant supposés réels, la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

montre que chacune des quantités $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$ est plus petite que 1 et l'on en conclut que u est réel, à un multiple près de $2i\mathrm{K}'$.

Or, on a déjà observé (n° 115) que les points M_1 et M_3 (de paramètres u_1 et $u_1 + 2i\mathrm{K}'$) sont symétriques par rapport à l'axe des x, et que les points M_1 et M_2 (de paramètres u_1 et $2\mathrm{K} - u_1$) sont symétriques par rapport au plan des zx. Enfin, les points de paramètres u et $-u$ sont symétriques par rapport au plan

des yz. Dès lors, pour construire la courbe, il suffira de faire varier u depuis o jusqu'à K. Nous obtiendrons ainsi un arc BA de la courbe situé au-dessus du plan des xy, allant d'un sommet situé dans le plan des yz à un sommet situé dans le plan des zx. Il restera ensuite à compléter la courbe en se servant des symétries indiquées.

117. **Condition pour que quatre points de la courbe soient dans un même plan.** — L'équation qui détermine les paramètres des points d'intersection de la courbe avec le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est

$$\text{(2)} \qquad A \operatorname{sn} u + B \operatorname{cn} u + C \operatorname{dn} u + D = 0.$$

Le premier membre est une fonction doublement périodique aux périodes $4K$ et $4iK'$ admettant dans un parallélogramme des périodes quatre infinis qui sont les zéros de $\Theta(u)$, par exemple les points

$$iK', \quad iK' + 2K, \quad -iK', \quad -iK' + 2K.$$

La fonction (2) a donc dans un parallélogramme quatre zéros u_1, u_2, u_3, u_4 correspondant aux quatre points d'intersection du plan avec la courbe. La courbe est donc bien du quatrième ordre : de plus, la somme des zéros ne diffère de la somme des infinis que par des multiples des périodes $4K$ et $4iK'$: on a donc

$$\text{(3)} \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4mK + 4niK',$$

m et n entiers. Cette condition nécessaire pour que quatre points soient dans un plan est suffisante. On le voit comme pour trois points en ligne droite sur une cubique plane (n° 61).

Plans bitangents menés par une tangente donnée. — Soient u_1 le paramètre du point de contact M_1 de la tangente donnée et u le paramètre du deuxième point de contact M; on a

$$2u + 2u_1 = 4mK + 4niK',$$
$$u = -u_1 + 2mK + 2niK'.$$

Comme deux valeurs de u qui ne diffèrent que par des multiples

de $4K$ et $4iK'$ donnent le même point de la courbe, il suffit d'attribuer à chacun des nombres entiers m et n les valeurs 0 et 1 et, par suite, de considérer quatre valeurs de u, savoir

$$-u_1, \quad -u_1+2K, \quad -u_1+2iK', \quad -u_1+2K+2iK'.$$

Il y a donc quatre plans bitangents qui passent par la tangente en M_1; les points de contact sont les symétriques du point M_1 par rapport aux trois plans de coordonnées et par rapport à l'origine. On voit de plus que les quatre plans bitangents menés par la tangente en M_1 sont les plans tangents aux quatre cônes du second ordre passant par la biquadratique (trois de ces cônes se réduisent ici à des cylindres).

Il est facile de déduire de là que *le rapport anharmonique des quatre plans bitangents menés par la tangente en* M_1 *reste fixe quand le point* M_1 *se déplace sur la courbe*. En effet, les équations des quatre cônes sont

$$\begin{aligned}
f &\equiv x^2+y^2-1=0,\\
\varphi &\equiv k^2x^2+z^2-1=0,\\
\varphi &- k^2f=0,\\
\varphi &- f=0.
\end{aligned}$$

Les équations des plans tangents au point M_1 sont de la forme

$$\begin{aligned}
P&=0, &\quad Q-k^2P&=0,\\
Q&=0, &\quad Q-P&=0;
\end{aligned}$$

le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à k^2. Il est constant et l'on voit que sa valeur donne le carré du module des fonctions elliptiques qui ont servi à la représentation paramétrique.

Si l'on prend la perspective de la biquadratique, le point de vue étant au point M_1 de la courbe, on obtient une cubique qui passe par la trace m_1 de la tangente en M_1; les plans que l'on peut mener par cette tangente et les tangentes à la courbe de l'espace ont pour traces les tangentes à la cubique menées par le point m_1. D'où ce théorème :

D'un point pris sur une cubique on peut encore mener quatre tangentes à la cubique et le rapport anharmonique de ces quatre tangentes est constant.

Points de rencontre de deux tangentes à la biquadratique. — D'après ce que nous venons de voir, si deux tangentes sont dans un même plan et ne sont pas parallèles, leur point de rencontre est situé dans l'un des plans de coordonnées. Pour avoir le lieu de ceux de ces points qui sont situés dans le plan $x = 0$, par exemple, il suffit de chercher la courbe décrite dans ce plan par la trace de la tangente en un point variable de la biquadratique. On trouve sans peine que ce lieu peut être représenté par les équations

$$y = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \qquad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

et qu'il est du quatrième degré.

Cette ligne et les lignes analogues situées dans les autres plans de coordonnées et le plan de l'infini sont les lignes doubles de la surface du huitième ordre engendrée par les tangentes à la biquadratique.

118. **Plans osculateurs menés à la courbe par un point de la courbe.** — Supposons que trois des quatre points d'intersection de la courbe avec un plan soient confondus. La relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$u_1 + 3u = 4m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1}{3} + \frac{m}{3}4\mathrm{K} + \frac{n}{3}4i\mathrm{K}'.$$

Il suffit de donner à chacun des nombres entiers m et n les valeurs 0, 1, 2. Il y a donc neuf plans osculateurs menés à la courbe, par le point M_1; trois de ces plans seulement sont réels. Quand on projette la courbe, le point de vue étant en M_1, les traces de ces plans deviennent des tangentes d'inflexion de la cubique.

Plans surosculateurs. — Si les quatre points d'intersection de la courbe avec un plan viennent se confondre, la relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$4u = 4m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}'$$

ou bien

$$u = m\mathrm{K} + ni\mathrm{K}'.$$

Chacun des entiers m et n pouvant prendre quatre valeurs 0, 1,

2, 3, on trouve 16 points. Ces points (dont 8 seulement sont réels) sont les sommets de la courbe : un des plans correspondants est la limite d'un plan bitangent dont les deux points de contact sont venus se confondre.

119. **Détermination des surfaces du second ordre passant par la biquadratique.** — Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique ; il existe une surface du second ordre S passant par la courbe gauche et admettant $M_1 M_2$ comme génératrice rectiligne. Si l'on mène un plan par la corde $M_1 M_2$ et si M'_1, M'_2 sont les deux nouveaux points d'intersection de la courbe par ce plan, la droite $M'_1 M'_2$ est une génératrice de la surface S et une génératrice du second système, en appelant premier système celui auquel appartient la droite $M_1 M_2$. En tenant compte de la relation qui exprime que les quatre points M_1, M_2, M'_1, M'_2 sont dans un même plan

$$u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 = 4mK + 4niK',$$

on voit qu'*une génératrice d'un système déterminé de S rencontre la biquadratique en deux points dont les arguments ont une somme constante.*

La valeur de la constante change seulement de signe quand on passe d'un système de génératrices à l'autre pour une même surface du second ordre ; elle est égale à une demi-période 0, $2K$, $2iK'$, ou $2K + 2iK'$ quand la surface est l'un des quatre cônes du second ordre qui passent par la biquadratique.

Comme application, nous allons considérer des polygones dont les côtés sont des génératrices d'une surface S passant par la biquadratique et dont les sommets sont sur la courbe, et nous chercherons la condition pour qu'un polygone ainsi défini se ferme.

Tout d'abord, les polygones doivent avoir un nombre pair de côtés ; de plus, les arguments de deux sommets consécutifs sont liés par les relations suivantes, dont les deux formes correspondent aux deux systèmes de génératrices :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &\equiv C, \\ -(u_2 + u_3) &\equiv C, \\ u_3 + u_4 &\equiv C, \\ -(u_4 + u_5) &\equiv C, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(le signe de congruence $\equiv$ signifiant ici que l'égalité a lieu à des multiples près des périodes $4K$ et $4iK'$). Si l'on veut, par exemple, avoir un quadrilatère, on exprimera que u_5 ne diffère de u_1 que par des multiples des périodes $4K$ et $4iK'$. En ajoutant membre à membre les équations précédentes on trouve

$$4C = 4mK + 4niK';$$

C doit être un quart de période. Les quadrilatères ne se ferment que si la surface considérée correspond à une telle détermination de C et ils se ferment toujours pour une surface ainsi définie.

Il résulte de ce qui précède qu'une surface du second ordre passant par la biquadratique est caractérisée par un argument elliptique défini au signe près.

Il est aisé de vérifier directement ce résultat. L'équation générale des quadriques (Q) passant par la biquadratique s'écrit

$$x^2 + y^2 - 1 + \lambda(k^2x^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Ces quadriques ne peuvent avoir leurs génératrices réelles que pour $k^2\lambda < -1$ ou pour $-1 < \lambda < 0$; les deux cas étant exactement analogues, bornons-nous au premier. On peut poser alors

$$\lambda^{-1} = -k^2 \operatorname{sn}^2 a;$$

l'argument réel a (défini au signe près, et à des multiples près de $2K$ et $2iK'$) caractérisera une quadrique (Q); ceci fait, les équations d'une génératrice (D) d'un système de (Q) s'écriront :

$$k(y \operatorname{sn} a - x \operatorname{cn} a) = \rho \quad (z - \operatorname{dn} a),$$
$$k(y \operatorname{sn} a + x \operatorname{cn} a) = \rho^{-1}(z + \operatorname{dn} a).$$

Substituons à x, y, z leurs expressions (1); ces équations vont devenir deux équations en u, dont la première admet dans un parallélogramme (aux périodes $4K$, $4iK'$) quatre racines; parmi ces racines, il en est deux, a et $2K + a$, qui ne conviennent pas à la seconde équation. Les deux autres, u_1 et u_2, sont les paramètres des intersections de (D) avec la biquadratique; elles satisfont à la relation

$$u_1 + u_2 \equiv -2a - 2K.$$

On a ainsi la valeur de la constante C de tout à l'heure en fonction de l'argument elliptique qui répond à (Q).

On traiterait de même le cas des génératrices du second système.

Pour $\lambda^2 < 1$, on poserait $\lambda = -\operatorname{sn}^2 b$.

Observons enfin que la représentation précédente permettrait d'étudier aisément le cas où (Q) est l'un des quatre cônes du second ordre passant par la biquadratique.

120. **Équation de la surface des ondes.** — La surface des ondes peut être définie de la façon suivante. Étant donné un ellipsoïde (E) qui, rapporté à trois axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0 \qquad (\alpha > \beta > \gamma).$$

on le coupe par le plan (P), passant par le centre O, et d'équation

$$Ax + By + Cz = 0;$$

sur la normale ON au plan (P) menée par O, on porte à partir de O, dans un sens quelconque, des longueurs OM′, OM″ égales aux demi-axes de la section de (E) par (P) : le lieu des points M′, M″ est, par définition, la surface des ondes (S) relative à (E).

Afin de trouver l'équation de cette surface, formons d'abord l'équation aux longueurs des demi-axes de la section variable. Pour que le point m (ξ, η, ζ) soit un sommet de cette section, il faut et il suffit que le plan tangent à (E) en M coupe (P) suivant une normale à Om; en d'autres termes, il faut et il suffit que la normale à (E) en m $\left(\text{de paramètres directeurs proportionnels à } \frac{\xi}{\alpha^2}, \frac{\eta}{\beta^2}, \frac{\zeta}{\gamma^2}\right)$ soit dans le plan OmN; or cette condition entraîne l'existence de deux quantités f, g, telles que l'on ait

$$(4) \qquad \frac{\xi}{\alpha^2} = f\xi + gA, \qquad \frac{\eta}{\beta^2} = f\eta + gB, \qquad \frac{\zeta}{\gamma^2} = f\zeta + gC.$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par ξ, η, ζ; nous aurons

$$fr^2 = 1,$$

en désignant par r la longueur du demi-axe Om. Les équations (4)

donneront alors

$$\frac{\xi}{gr^2} = \frac{A\alpha^2}{r^2 - \alpha^2}, \qquad \frac{\eta}{gr^2} = \frac{B\beta^2}{r^2 - \beta^2}, \qquad \frac{\zeta}{gr^2} = \frac{C\gamma^2}{r^2 - \gamma^2};$$

écrivons enfin que m appartient à (P), et nous obtiendrons l'équation aux longueurs des demi-axes de la section sous la forme

$$\frac{A^2\alpha^2}{r^2 - \alpha^2} + \frac{B^2\beta^2}{r^2 - \beta^2} + \frac{C^2\gamma^2}{r^2 - \gamma^2} = 0.$$

Ceci posé, désignons maintenant par x, y, z les coordonnées de l'un des points M′ ou M″; nous aurons

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

de sorte que l'équation de la surface des ondes relatives à (E) sera

$$\frac{\alpha^2 x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2} = 0.$$

Chassons les dénominateurs et supprimons le facteur $x^2 + y^2 + z^2$; nous obtiendrons l'équation de (S) sous la forme

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) \\ &\quad - (\beta^2 + \gamma^2)\alpha^2 x^2 - (\gamma^2 + \alpha^2)\beta^2 y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 z^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.\end{aligned}$$

La surface est donc du quatrième ordre; elle est symétrique par rapport à l'origine, aux axes et aux plans de coordonnées, ce qui était évident *a priori*. La trace de la surface sur chacun des plans de coordonnées se décompose en deux coniques : montrons-le d'abord en nous reportant à la définition géométrique du lieu. Si l'on coupe l'ellipsoïde (E) par un plan tournant autour de l'un des axes, Oy par exemple, l'un des demi-axes de la section est constamment égal à β; l'autre est un demi-diamètre de l'ellipse principale située dans le plan zOx. Les points correspondants du lieu sont dans le plan zOx, et ils sont situés sur un cercle c de centre O et de rayon β, ainsi que sur l'ellipse c_1 que l'on obtient en faisant tourner d'un angle droit autour de O l'ellipse principale, $y = 0$, de (E). On vérifie d'ailleurs sur l'équation de la surface (S) que sa trace sur le plan $y = 0$ est représentée par l'ensemble des équations

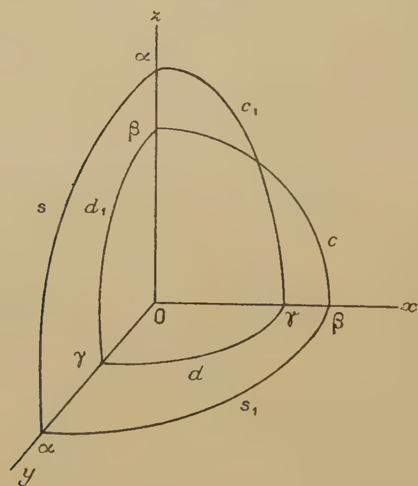
$$y = 0, \qquad (z^2 + x^2 - \beta^2)(\gamma^2 z^2 + \alpha^2 x^2 - \gamma^2\alpha^2) = 0,$$

et ce résultat nous conduit à mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(5) \qquad (x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2) \\ -(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)y^2=0,$$

que nous aurons à utiliser bientôt. On trouverait, de même, pour

Fig. 8.



les traces sur les autres plans de coordonnées

$$z=0, \qquad (x^2+y^2-\gamma^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2\beta^2)=0,$$
$$x=0, \qquad (y^2+z^2-\alpha^2)(\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\beta^2\gamma^2)=0,$$

et l'on peut compléter ces résultats de la façon suivante. Introduisons les coordonnées homogènes X, Y, Z, T au moyen des relations

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\frac{1}{T};$$

on voit que (S) coupe le plan de l'infini T = o suivant les coniques imaginaires

$$T=0, \qquad (X^2+Y^2+Z^2)(\alpha^2X^2+\beta^2Y^2+\gamma^2Z^2)=0.$$

On peut donc dire que la surface des ondes coupe chacune des faces du tétraèdre de coordonnées XYZT = o suivant un système de deux coniques, réelles ou imaginaires; chaque système de

coniques admet comme triangle conjugué commun le triangle suivant lequel la face considérée du tétraèdre est coupée par les trois autres faces. D'ailleurs, on vérifie aisément que les quatre points communs aux coniques d'un système sont imaginaires à l'exception de ceux qui appartiennent au plan $Y = 0$.

121. Expression des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres elliptiques. — La forme (5) que nous venons de donner à l'équation de la surface des ondes va nous permettre de représenter très simplement les coordonnées d'un point de la surface par des fonctions elliptiques de deux paramètres.

En effet, l'équation (5) équivaut évidemment au système suivant :

$$
(6)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-\beta^2 = (\alpha^2-\beta^2)\lambda, \\ \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2 = (\beta^2-\gamma^2)y^2\lambda^{-1}, \end{cases}
$$

dans lequel λ désigne un paramètre variable; pour une valeur constante attribuée à λ, les équations (6) représentent une biquadratique (C) située sur (S); et, λ variant, (C) engendre la surface (S).

De même, (5) peut être remplacée par le second système

$$
(7)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-\beta^2 = (\alpha^2-\beta^2)\alpha^{-2}y^2\mu^{-1}, \\ \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2 = (\beta^2-\gamma^2)\alpha^2\mu, \end{cases}
$$

dans lequel μ représente un nouveau paramètre variable.

Cela étant, procédons comme au n° 115, et représentons les coordonnées d'un point variable de la biquadratique $\lambda = \text{const.}$ (ou $\mu = \text{const.}$) au moyen d'un paramètre elliptique v (ou u); nous aurons ainsi exprimé les coordonnées x, y, z d'un point de (S), solutions des systèmes évidemment compatibles (6) et (7), par des fonctions elliptiques de deux paramètres u et v. Développons les calculs.

De (6) et (7) on tire immédiatement

$$
(8)\qquad \begin{cases} x^2 = \beta^2(1-\lambda)\left[1-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\,\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}(1-\mu)\right], \\ y^2 = \alpha^2\lambda\mu, \\ z^2 = \alpha^2(1-\mu)\left[1-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}(1-\lambda)\right]. \end{cases}
$$

Posons alors

$$\lambda = \operatorname{cn}^2(u, k), \qquad \mu = \operatorname{cn}^2(v, l),$$

avec

$$k^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2}, \qquad l^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

L'existence des fonctions elliptiques précédentes est d'ailleurs assurée (n° 112), car en vertu de notre hypothèse fondamentale $\alpha > \beta > \gamma$ (n° 120) k^2 et l^2 sont bien compris entre 0 et 1; on a, de plus,

$$k'^2 = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}, \qquad l'^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2};$$

observons enfin que les quantités précédentes satisfont aux relations

$$(9) \qquad \alpha k' = \beta l, \qquad \beta l' = \gamma k$$

que nous aurons souvent à utiliser.

Ceci posé, après le changement de variables précédent, les équations (8) s'écriront :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \beta \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, l), \\ y &= \alpha \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, l), \\ z &= \alpha \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, l), \end{aligned} \right.$$

ou, sous forme abrégée,

$$x = \beta s\, d_1, \qquad y = \alpha c c_1, \qquad z = \alpha\, d s_1,$$

en attribuant l'indice 1 aux fonctions de l'argument v.

Inversement, soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point M de la surface; *proposons-nous de trouver tous les couples de paramètres* (u, v) *qui, substitués dans les seconds membres des équations* (10), *reproduisent ces coordonnées.* Soient (u_0, v_0) un couple répondant à la question; d'après (6) et (7), λ et μ ne sont susceptibles que d'une seule valeur au point M; on devra donc avoir

$$\operatorname{cn}^2 u = \operatorname{cn}^2 u_0, \qquad \operatorname{cn}^2 v = \operatorname{cn}^2 v_0;$$

par suite (n° 88), on pourra écrire,

$$\begin{aligned} u &= (-1)^p u_0 + 2mK + 2m' iK', \\ v &= (-1)^q v_0 + 2nL + 2n' iL', \end{aligned}$$

en désignant par m, m', n, n', p, q des nombres entiers, par $4K$ et $2iK'$ les périodes de $\text{sn}(u, k)$ et par $4L$, $2iL'$, celles de $\text{sn}(v, l)$. Exprimons alors que les couples précédents donnent à x, y, z les mêmes valeurs que le couple (u_0, v_0), et il viendra (n° 86)

$$m + n' \equiv p \equiv q \equiv m' + n \qquad (\text{mod } 2),$$

la *congruence* $a \equiv b (\text{mod. } c)$ signifiant, comme on sait, que $a - b$ est un multiple de c.

Prenons d'abord $p = 0 = q$; la solution la plus générale des congruences précédentes sera donnée par les formules

$$m = m_1 + m'_1, \qquad m' = n_1 - n'_1,$$
$$n = n_1 + n'_1, \qquad n' = m_1 - m'_1,$$

m_1, m'_1, n_1, n'_1 désignant de nouveaux entiers, et nous aurons

$$u = u_0 + 2m_1 K + 2m'_1 K + 2n_1 iK' - 2n'_1 iK',$$
$$v = v_0 + 2m_1 iL' - 2m'_1 iL' + 2n_1 L + 2n'_1 L;$$

en d'autres termes, le couple (u, v) se déduira du couple (u_0, v_0) par l'addition de multiples quelconques des *quatre couples de périodes*

$$(2K, 2iL'), \quad (2K, -2iL'), \quad (2iK', 2L), \quad (-2iK', 2L).$$

Pour abréger, nous dirons que deux tels couples (u, v), (u_0, v_0) sont *équivalents*.

Enfin, si l'on prend $p = 1 = q$, on établira par un procédé analogue que le couple (u, v) est équivalent au couple $(2K - u_0, 2L - v_0)$.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

1° *A tout couple des arguments elliptiques* (u, v) *correspond un point* (x, y, z) *et un seul de la surface des ondes;*

2° *A tout point* (x, y, z) *de la surface correspondent deux couples de paramètres elliptiques* (u, v) *et* $(2K - u, 2L - v)$, *ainsi que tous leurs équivalents.*

122. Les 16 points de ramification de la représentation elliptique. — Afin d'approfondir l'étude de la représentation elliptique que nous venons d'obtenir, nous allons d'abord rechercher *s'il existe des points de la surface pour lesquels les deux couples de paramètres* (u, v) *et* $(2K - u, 2L - v)$ *sont équivalents.*

S'il en est ainsi, les différences

$$u-(2K-u)=2u-2K \qquad \text{et} \qquad v-(2L-v)=2v-2L$$

doivent constituer un couple de périodes; on devra donc avoir, m, m', n, n' désignant des entiers,

$$\begin{aligned} 2u-2K &= 2(m+m')K \;+2(n-n')iK', \\ 2v-2L &= 2(m-m')iL'+2(n+n')L. \end{aligned}$$

Pour obtenir tous les points répondant à la question, il faudra trouver tous les couples (u, v) non équivalents qui satisfont aux équations précédentes, et, pour cela, il suffira de donner à chacun des entiers m, m', n, n' l'une des valeurs o ou 1. En combinant tous les choix possibles, on obtiendra ainsi 16 points de la surface; leurs couples de paramètres seront donnés par le Tableau suivant :

(A)

K L	0 $-L-iL'$	$K+iK'$ 0	$-iK'$ $-iL'$
0 $-L+iL'$	$-K$ L	$-iK'$ iL'	$-K+iK'$ 0
$K-iK'$ 0	iK' $-iL'$	K $-L$	0 $L-iL'$
iK' iL'	$-K-iK'$ 0	0 $L+iL'$	$-K$ $-L$

(dans chaque case, la lettre supérieure se rapporte à u, et la lettre inférieure à v).

Nous verrons bientôt (n° 127) que ces 16 points sont des *points singuliers* de la surface (points coniques), et nous indiquerons alors leurs coordonnées cartésiennes. Mais, actuellement, nous nous limitons à l'étude de la représentation paramétrique de la surface, et nous allons montrer que, dans cette représentation, les 16 points précédents jouent le rôle de *points de ramification :* en d'autres termes, si l'on part d'un point arbitraire de la surface,

de paramètres (u, v), et si, sur la surface, on décrit un chemin fermé autour de l'un de ces 16 points, on revient au point de départ avec le couple $(2K - u, 2L - v)$.

Pour établir ce résultat, nous commencerons par discuter la disposition des nappes réelles de la surface (n° 123) et nous démontrerons la proposition précédente dans le cas où le point de ramification est réel (n° 125). Puis, nous verrons ultérieurement (n° 126) que la proposition subsiste pour un point de ramification quelconque.

123. Les deux nappes réelles de la surface. — Cherchons dans quels couples d'intervalles on doit faire varier u et v pour que le point M correspondant soit réel. Tout d'abord, s'il en est ainsi, λ devra être réel, en vertu de (6); $\operatorname{cn} u = \sqrt{\lambda}$ sera donc réel ou purement imaginaire, et, comme y doit être réel, $\operatorname{cn} v$ sera réel ou purement imaginaire, en même temps que $\operatorname{cn} u$. Dès lors, les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{dn} v$ ne peuvent être que réelles ou purement imaginaires. Mais le second cas est impossible, car si $s^2 (= \operatorname{sn}^2 u)$ était négatif, les deux membres de l'équation

$$\frac{x^2}{\beta^2 s^2} = l'^2 + \frac{l^2 y^2}{\alpha^2 (1 - s^2)},$$

conséquence immédiate de (10), seraient de signes contraires. L'équation

$$\frac{z^2}{\alpha^2 s_1^2} = k'^2 + \frac{k^2 y^2}{\alpha^2 (1 - s_1^2)}$$

montre de même que $s_1 (= \operatorname{sn} v)$ est réel; et, par suite, les fonctions

$$\operatorname{dn} u = \frac{z}{\alpha s_1} \quad \text{et} \quad \operatorname{dn} v = \frac{x}{\beta s}$$

ont des valeurs réelles.

Or, pour que $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{dn} u$ soient simultanément réels, il faut et il suffit (n° 109) que u soit de l'une des deux formes

$$u = u' + 2miK', \qquad u = iu' + (2m+1)K,$$

u' étant réel, et m désignant un entier; dans le premier cas, $\operatorname{cn} u$ est réel; dans le second, il est purement imaginaire. Une remarque analogue s'applique à v; et, puisque $\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v$ est réel, nous aboutissons à la conclusion suivante :

Pour que le couple d'arguments (u, v) *corresponde à un point réel de la surface, il faut et il suffit que l'un des deux cas suivants soit réalisé :*

1° *Le couple*

$$[u+(1+\varepsilon)iK', \quad v+(1+\varepsilon')iL'] \qquad (\varepsilon^2=1, \varepsilon'^2=1)$$

est équivalent à un couple de nombres réels;

2° *Le couple*

$$(u+\varepsilon' K, v+\varepsilon L)$$

est équivalent à un couple de nombres purement imaginaires.

On voit en outre que, si le premier mode de représentation paramétrique d'un point réel de la surface (n° 121, *ad fin.*) appartient à l'un ou l'autre des deux cas précédents, le second mode de représentation appartient au même cas que le premier.

Ce résultat acquis, nous allons restreindre l'amplitude des intervalles où il faut faire varier u et v pour obtenir l'ensemble des points réels de la surface. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas.

Soit $M(x, y, z)$ le point correspondant aux déterminations $\varepsilon = -1 = \varepsilon'$ des symboles $\varepsilon, \varepsilon'$; d'après le n° 86, les trois nouveaux points qu'on déduit de M en donnant à ε et ε' leurs différentes significations possibles sont les symétriques de M relativement à Ox, Oy et Oz; cette correspondance est indiquée par le Tableau suivant :

	$\varepsilon' = 1$	$\varepsilon' = -1$
$\varepsilon = 1$	$(-x, y, -z)$	$(x, -y, -z)$
$\varepsilon = -1$	$(-x, -y, z)$	(x, y, z)

(qui s'appliquerait encore au second cas).

Nous pouvons donc nous borner à donner à u et v des valeurs réelles, appartenant à deux intervalles d'amplitudes respectives $4K$ et $4L$, soit, par exemple,

$$-2K \leqq u < 2K, \qquad -2L \leqq v < 2L.$$

Ce premier resserrement obtenu, les Tableaux

	u	$-u$
v	(x, y, z)	$(-x, y, z)$
$-v$	$(x, y, -z)$	$(-x, y, -z)$

	u	$2K-u$
v	(x, y, z)	$(x, -y, z)$
$2L-v$	$(x, -y, z)$	(x, y, z)

(dont la signification est évidente) montrent aussitôt qu'on peut se borner à faire varier u et v dans les intervalles

$$0 \leqq u \leqq K, \qquad 0 \leqq v \leqq L.$$

Soit (A_1) la région de (S) correspondant aux intervalles précédents, région qui est évidemment comprise dans le premier octant $(x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0)$; les points réels de (S), dont les couples de paramètres sont de la première des formes données plus haut, se composent de (A_1) et de ses symétriques par rapport aux plans et aux axes de coordonnées; ces points forment une première nappe, (S_1).

Dans le second cas, on verrait de même que, si (A_2) est la région de (S) définie par les conditions

$$0 \leqq \frac{u-K}{i} \leqq K', \qquad 0 \leqq \frac{v-L}{i} \leqq L',$$

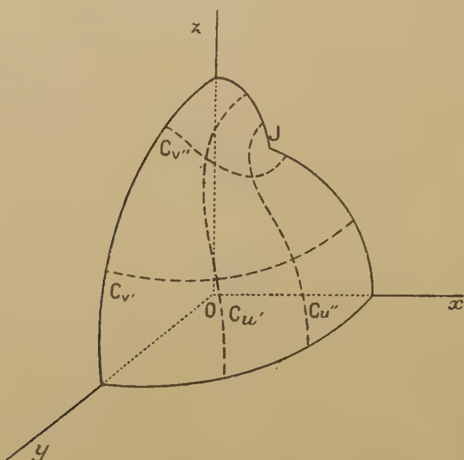
les points réels de (S), dont les couples de paramètres sont de la seconde des formes sus-indiquées, se composent de (A_2) et de ses symétriques par rapport aux plans et aux axes de coordonnées: ces points forment une seconde nappe, (S_2).

En tout point de $\left\{\begin{matrix}(S_1)\\(S_2)\end{matrix}\right\}$ on a λ et μ $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ o. D'après (6), la nappe $\left\{\begin{matrix}(S_1)\\(S_2)\end{matrix}\right\}$ est donc $\left\{\begin{matrix}\text{extérieure}\\\text{intérieure}\end{matrix}\right\}$ à la sphère $x^2+y^2+z^2=\beta^2$; et les deux nappes communiquent évidemment par les points $u=\varepsilon K$, $v=\varepsilon' L$ ($\varepsilon^2=1$, $\varepsilon'^2=1$), et par ces points seulement. Ce sont précisément les seuls points de ramification réels; nous avons déjà annoncé que ce sont des points coniques.

124. Distribution des courbes paramétriques sur les nappes réelles de la surface. — Nous pouvons préciser maintenant la distribution des courbes paramétriques réelles sur les nappes réelles de la surface.

Faisons d'abord varier u de o à K; la biquadratique C_u, lieu

Fig. 9 *a*.



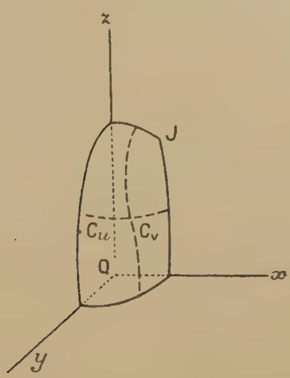
des points $u=u_0$, restera symétrique par rapport aux plans de coordonnées; elle coïncidera d'abord avec le cercle $s=o$ du plan des yz; puis, elle se dédoublera en deux ovales fermés, symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, et qui décriront la nappe extérieure de la surface. L'un de ces ovales ($x>o$) est le lieu des points de la biquadratique pour lesquels v est réel; l'autre ($x<o$) est le lieu des points pour lesquels on a $v=v_1+2iL'$ (v_1, réel). Sur la figure, on a représenté deux arcs des courbes $C_{u'}$, $C_{u''}$ ($o<u'<u''<K$) appartenant au premier octant (*fig.* 9 *a*).

Prenons maintenant $u = K$; les équations (10) donneront

$$x = \beta \operatorname{dn} v, \qquad y = 0, \qquad z = \beta l \operatorname{sn} v.$$

La courbe correspondante n'est autre que le cercle $c = 0$. D'une façon plus précise, si l'on n'attribue à v que des valeurs réelles ou de la forme $v_1 + 2iL'$ (v_1, réel), on n'obtiendra que les deux arcs de cercle, JJ'', $J'J'''$ (*fig.* 10) définis par la condition $|x| > \beta l'$;

Fig. 9 *b*.



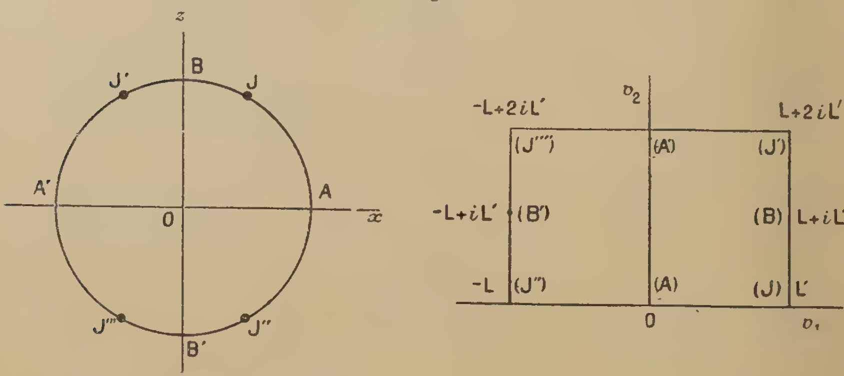
les extrémités de ces arcs coïncideront d'ailleurs avec les 4 points de ramification réels (la notation satisfait aux conventions suivantes : pour J, on a $x > 0$, $z > 0$; pour J', $x < 0$, $z > 0$; pour J'', $x > 0$, $z < 0$; pour J''', $x < 0$, $z < 0$). Afin de décrire les arcs restants JJ', $J''J'''$ du cercle $c = 0$, il faudra donner à v des valeurs de la forme $\pm L + iv_2$ ($0 < v_2 < 2L'$). En définitive, pour décrire par continuité tout le cercle $c = 0$, il faudra que v décrive le contour fermé ci-après (*fig.* 10, page 188; les lettres entre parenthèses indiquent la correspondance avec le cercle).

Posons alors $u = K + iu_1$, et faisons varier la quantité réelle u_1 de 0 à K'; la biquadratique C_u se confondra d'abord avec les arcs JJ', $J''J'''$; puis, elle sera formée de deux ovales séparés par le plan $z = 0$ et qui balaieront la nappe intérieure de la surface; pour l'un de ces ovales, $i(v + L)$ est réel; pour l'autre, c'est $i(v - L)$ qui est réel. Enfin, pour $u = K + iK'$, ces deux ovales coïncideront avec le cercle $d = 0$ du plan $z = 0$ (*fig.* 9 *b*).

On montrerait de même que si v varie de 0 à L, la biquadra-

tique C_{v_0}, d'équation $v = v_0$, reste symétrique par rapport aux plans de coordonnées; elle se confond d'abord avec l'ellipse $s_1 = 0$ du plan xOy; puis, elle se dédouble en deux branches fermées [$u = u_1$; $u = u_1 + 2iK'$; u_1 variable réelle] séparées par le plan $z = 0$ et qui décrivent la nappe extérieure de (S) pour se confondre; enfin, avec les arcs $|x| < \beta l'$ de l'ellipse c_1 du plan xOz. Puis v_1

Fig. 10.



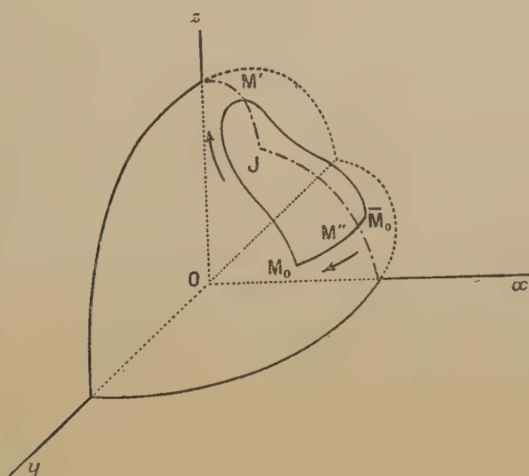
variant de o à L', la biquadratique $v = L + iv_1$ coïncide primitivement avec les arcs $|x| > \beta l'$ de l'ellipse $c_1 = 0$; elle décrit ensuite la nappe intérieure de (S), pour se confondre avec l'ellipse $d_1 = 0$ du plan yOz.

Observons enfin qu'au lieu de balayer la nappe extérieure au moyen de courbes C_{u_0} telles que $0 < u_0 < K$, on aurait pu employer des courbes C_{u_0} telles que $K < u_0 < 2K$; et une remarque analogue s'applique à la nappe intérieure et aux courbes C_{v_0}. On voit immédiatement que les courbes C_{u_0} et C_{2K-u_0} sont identiques; mais si, chaque fois, on s'astreint à faire varier v dans le même sens, *la biquadratique sera parcourue successivement dans deux sens opposés.*

125. Permutation des couples paramétriques à la suite d'un circuit autour d'un point de ramification réel. — Nous pouvons montrer maintenant comment s'opère la permutation des couples paramétriques quand on décrit un chemin fermé autour d'un des points J, J', J'' ou J'''. Considérons un point $M_0(u_0, v_0)$, en sup-

posant, par exemple, $0 < u_0 < K$, $0 < v_0 < L$, de sorte que M_0 appartient à la nappe extérieure et au premier octant. Désignons par $\overline{M_0}$ le symétrique de M_0 relativement au plan $y = 0$, par $\begin{Bmatrix} M_0 M' \overline{M_0} \\ M_0 M'' \overline{M_0} \end{Bmatrix}$ l'arc de $\begin{Bmatrix} C_{u_0} \\ C_{v_0} \end{Bmatrix}$ qui traverse en $\begin{Bmatrix} M' \\ M'' \end{Bmatrix}$ le plan $y = 0$ sans couper le plan $\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = 0$, et suivons par continuité la variation de u et v quand le point $M(u, v)$ décrit le contour fermé $M_0 M' \overline{M_0} M'' M_0$.

Fig 11.



Tout d'abord, sur l'arc $M_0 M'$, u reste égal à u_0, et v croît de v_0 à L; M ayant dépassé M', y deviendra négatif; v *continuera donc à croître :* il atteindra la valeur $2L - v_0$ quand M sera parvenu en $\overline{M_0}$. A partir de ce moment, M se déplacera sur l'arc $\overline{M_0} M'' M_0$; mais, puisque l'on fait varier u et v par continuité, il résulte de la remarque qui termine le n° 124 que, sur l'arc $\overline{M_0} M'' M_0$, on aura constamment $v = 2L - v_0$ et que u commencera par croître : M décrivant l'arc $M_0 M''$, u croîtra de u_0 à K et M ne pourra rentrer dans le premier octant que si u dépasse la valeur K; enfin, quand M sera revenu en M_0, le couple (u, v) sera devenu $(2K - u_0, 2L - v_0)$ comme nous l'avions annoncé.

126. Les 32 transformations homographiques de la surface en elle-même. — Nous avons vu dans l'étude de la biquadratique (n^o 115) que la substitution $u_1 = \pm u + a$ fait correspondre à tout point $M(u)$ de la courbe un point $M_1(u_1)$ et un seul de la même courbe, et cela quel que soit a. La surface des ondes jouit-elle d'une propriété analogue? En d'autres termes, *les formules*

$$(11) \qquad u_1 = \varepsilon u + a, \qquad v_1 = \varepsilon_1 v + b \qquad (\varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon_1^2 = 1)$$

font-elles correspondre à tout point $M(u, v)$ *de* (S) *un point* $M_1(u_1, v_1)$ *et un seul de la surface?* En nous appuyant sur la discussion du n° 125, nous allons montrer que, *si a et b sont arbitraires, la réponse est négative.*

En effet, prenons d'abord $\varepsilon = 1 = \varepsilon_1$; définissons le point M_0 par le couple (u_0, v_0) $(0 < u_0 < K,\ 0 < v_0 < L)$; et faisons décrire à M le contour $M_0 M' \overline{M_0} M'' M_0$ du n° 125. Quand M partira de M_0, son correspondant M_1 sera en $(M_1)_0$ $(u_0 + a,\ v_0 + b)$; et quand le point M sera revenu en M_0, après avoir décrit le contour fermé, son correspondant M_1 aura pour paramètres $2K - u_0 + a$, $2L - v_0 + b$; or, en général, ces paramètres définiront un point distinct de $(M_1)_0$, sauf pourtant si les expressions

$$u_0 + a + (2K - u_0 + a), \quad v_0 + b + (2L - v_0 + b)$$

sont équivalentes au couple $(2K, 2L)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que a et b soient de la forme

$$a = (m + m')K + (n - n')iK',$$
$$b = (m - m')iL' + (n + n')L,$$

m, m', n, n' étant des entiers. Il en résulte tout d'abord que la transformation est nécessairement *réciproque :* elle échange l'un dans l'autre les points M et M_1; de plus, comme au n° 122 on peut évidemment se borner à donner à chacun des entiers m, m', n, n' la valeur 0 ou 1, de sorte qu'il n'existe que 16 transformations répondant à la question (avec $\varepsilon = 1 = \varepsilon_1$). Les déterminations du couple (a, b) qui définissent ces transformations sont fournies par le Tableau suivant :

(B)

0 0	K $2L+iL'$	$-iK'$ L	$K+iK'$ $L+iL'$
K $2L-iL'$	$2K$ 0	$K+iK'$ $L-iL'$	$2K-iK'$ L
iK' L	$K-iK'$ $L+iL'$	0 $2L$	K iL'
$K-iK'$ $L-iL'$	$2K+iK'$ L	K $-iL'$	$2K$ $2L$

où la lettre $\begin{pmatrix}\text{supérieure}\\ \text{inférieure}\end{pmatrix}$ de chaque case donne la valeur de $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.

En se servant des formules du n° 86, on établira aisément que *chacune des 16 substitutions précédentes définit une transformation homographique de la surface S en elle-même*. On a, par exemple :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \beta\,\mathrm{sn}(u+K)\,\mathrm{dn}(v+iL') = \frac{\beta}{i}\,\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v} = -\frac{\beta i y}{z},\\ y_1 &= \alpha\,\mathrm{cn}(u+K)\,\mathrm{cn}(v+iL') = -\frac{\alpha k'}{il}\,\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v} = \frac{\alpha i x}{z},\\ z_1 &= \alpha\,\mathrm{dn}(u+K)\,\mathrm{sn}(v+iL') = \frac{\alpha k'}{l\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v} = \frac{\alpha\beta}{z},\end{aligned}\right.$$

ou, en employant les coordonnées homogènes

$$(13)\qquad \frac{X_1}{-\beta i Y} = \frac{Y_1}{\alpha i X} = \frac{Z_1}{\alpha\beta T} = \frac{T_1}{Z}.$$

On vérifiera sans peine que les formules (12) ou (13) transforment bien en elle-même la surface des ondes. Un calcul tout semblable s'applique à chacune des 16 substitutions obtenues (dont l'une, d'ailleurs, est la substitution identique : $u_1 = u$, $v_1 = v$); géométriquement, chaque substitution du Tableau (B) revient à remplacer le point $\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$ par le point dont les coordonnées homogènes $\begin{pmatrix}X_1 & Y_1\\ Z_1 & T_1\end{pmatrix}$ sont données par la case homologue du

Tableau suivant :

	$\begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta i Y & -\alpha i X \\ -\alpha\beta T & Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta\gamma T & -\gamma i Z \\ \beta i Y & X \end{matrix}$	$\begin{matrix} \gamma i Z & -\alpha\gamma T \\ \alpha i X & Y \end{matrix}$
	$\begin{matrix} \beta i Y & \alpha i X \\ -\alpha\beta T & Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} -X & -Y \\ Z & T \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\gamma i Z & \alpha\gamma T \\ \alpha i X & Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta\gamma T & \gamma i Z \\ \beta i Y & X \end{matrix}$
(C)	$\begin{matrix} \beta\gamma T & \gamma i Z \\ -\beta i Y & X \end{matrix}$	$\begin{matrix} \gamma i Z & \alpha\gamma T \\ -\alpha i X & Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} X & -Y \\ -Z & T \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta i Y & \alpha i X \\ \alpha\beta T & Z \end{matrix}$
	$\begin{matrix} -\gamma i Z & -\alpha\gamma T \\ -\alpha i X & Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta\gamma T & -\gamma i Z \\ -\beta i Y & X \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta i Y & -\alpha i X \\ \alpha\beta T & Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} -X & Y \\ -Z & T \end{matrix}$

On étudierait de même le cas où ε et ε_1 ont d'autres déterminations dans (11); et l'on vérifierait sans peine que les seules transformations nouvelles ainsi obtenues sont celles qui proviennent de la combinaison de l'une des 16 homographies précédentes avec la substitution $u_1 = -u$, $v_1 = v$, c'est-à-dire avec la symétrie

$$x_1 = -x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z.$$

En définitive, on obtient donc un système de 32 *homographies qui transforment la surface en elle-même*. Ces transformations jouent un rôle fondamental dans la théorie de la surface des ondes. Remarquons, dès à présent, qu'elles permettent de justifier complètement la désignation de points de ramification que nous avons attribuée aux 16 points du n° 122. En effet, une substitution arbitraire du Tableau (B), ou (C), change le point J ($u = K$, $v = L$) en un point J_1 dont les arguments (u, v) sont donnés par la case homologue du Tableau (A); étant réciproque, la substitution change un chemin fermé C_1 décrit autour de J_1 en un chemin analogue C décrit autour de J : c'est dire que C_1, comme C, permute les deux couples d'arguments qui correspondent à un point quelconque de la surface.

127. Points singuliers de la surface. — Nous allons établir maintenant que *la surface des ondes ne possède que* 16 *points*

singuliers : les 16 points de ramification que nous avons définis antérieurement (nº **122**).

Commençons par déterminer les points singuliers à distance finie. Pour qu'un point (u, v) à distance finie soit singulier, il faut et il suffit qu'il vérifie les équations

$$\frac{x'_u}{x'_v} = \frac{y'_u}{y'_v} = \frac{z'_u}{z'_v},$$

c'est-à-dire, d'après le nº **95** :

$$\frac{c\,d\,d_1}{l^2 s\,c_1\,s_1} = -\frac{s\,d\,c_1}{c\,s_1\,d_1} = \frac{k^2 s\,c\,s_1}{d\,c_1\,d_1}. \tag{14}$$

Cherchons d'abord les solutions de ce système qui annulent les deux termes du rapport du milieu ; elles sont données par l'un des systèmes :

$$s = 0 = d_1, \tag{I}$$
$$c = 0 = c_1, \tag{II}$$
$$d = 0 = s_1, \tag{III}$$
$$s = 0 = s_1, \tag{IV}$$
$$d = 0 = d_1. \tag{V}$$

Les solutions de (I), (II), (III) annulant tous les termes des rapports (14) sont acceptables ; or on vérifie aussitôt qu'elles donnent précisément les 12 points de ramification à distance finie du Tableau (A). Quant aux solutions de (IV) et (V), elles sont à rejeter, comme le montre la comparaison des rapports extrêmes de (14).

Si, maintenant, le système (14) possède d'autres solutions (pour lesquelles s, s_1, c, c_1, d, d_1 restent finis), ces solutions ne peuvent annuler à la fois sdc_1 et cs_1d_1 ; en égalant alors le rapport du milieu aux rapports extrêmes, on déduit de là que ces solutions vérifient les équations

$$1 - l'^2 s^2 - l^2 s_1^2 = 0 = 1 - k^2 s^2 - k'^2 s_1^2 ;$$

mais, en vertu de la relation $k'^2 - l^2 \neq 0$ (conséquence de $\alpha > \beta > \gamma$), le système précédent équivaut à (II). Les 12 points de ramification à distance finie sont donc aussi les seuls points singuliers que la surface possède à distance finie.

Déterminons maintenant les points singuliers à l'infini. Soit N un tel point; on peut toujours trouver une homographie (H) (n° 126) qui transforme (S) en elle-même et le plan de l'infini en l'un des plans $xyz = 0$; N coïncidera alors avec un point singulier à distance finie, N_0, c'est-à-dire avec un des 12 points de ramification à distance finie. La transformation (H) étant réciproque, N est encore le transformé de N_0 par (H); et, comme (H) ne peut qu'échanger les uns dans les autres les 16 points de ramification, N est bien l'un des 4 points de ramification du plan $T = 0$.

En résumé, la surface des ondes n'admet pas de ligne double; elle possède exactement 16 points singuliers; ce sont les 16 points de ramification dont les arguments (u, v) sont donnés par le Tableau (A) et dont les coordonnées homogènes $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ sont données par les cases correspondantes du Tableau ci-dessous :

(D)

$\begin{matrix} \beta l' & 0 \\ \beta l & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -\alpha i l' \\ -\alpha & l \end{matrix}$	$\begin{matrix} \gamma & -i\gamma l \\ 0 & l' \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta l & \alpha i \\ \alpha k & 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & \alpha i l' \\ -\alpha & l \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta l' & 0 \\ \beta l & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta l & \alpha i \\ -\alpha k & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\gamma & i\gamma l \\ 0 & l' \end{matrix}$
$\begin{matrix} \gamma & i\gamma l \\ 0 & l' \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta l & -\alpha i \\ -\alpha k & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \beta l' & 0 \\ -\beta l & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & \alpha i l' \\ \alpha & l \end{matrix}$
$\begin{matrix} \beta l & -\alpha i \\ \alpha k & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\gamma & -i\gamma l \\ 0 & l' \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -\alpha i l' \\ \alpha & l \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\beta l' & 0 \\ -\beta l & 1 \end{matrix}$

128. Plans tangents singuliers. — Soit

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z + \tau T = 0$$

l'équation d'un plan en coordonnées homogènes; considérons les 16 plans dont les coefficients $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix}$ sont donnés par les

16 cases du Tableau suivant :

(E)

$-k$	0	0	ik	1	ik'	$-l$	i
k'	β	1	$-\alpha k'$	0	$-\beta l'$	l'	0
0	$-ik$	k	0	l	$-i$	1	ik'
1	$-\alpha k'$	k'	β	l'	0	0	$\beta l'$
1	$-ik'$	l	i	k	0	0	ik
0	$-\beta l$	l'	0	k'	$-\beta$	1	$\alpha k'$
$-l$	$-i$	1	$-ik'$	0	$-ik$	$-k$	0
l'	0	0	$\beta l'$	1	$\alpha k'$	k'	$-\beta$

En s'appuyant sur les égalités (9), le lecteur vérifiera aisément que l'un quelconque, Π, des 16 plans précédents contient 6 points singuliers qu'on peut définir de la façon suivante : soit A la case qui occupe dans le Tableau (D) la même place que celle qui définit Π dans le Tableau (E); les 6 points singuliers contenus dans Π sont définis par les 6 cases du Tableau (D) qui appartiennent à la même colonne et à la même ligne que A sans coïncider avec A. C'est ainsi que le plan

$$kx + k'z - \beta = 0 \tag{15}$$

contient les 6 points de coordonnées homogènes

$$\gamma, \pm i\gamma l, 0, l'; \quad \beta l, \pm \alpha i, -\alpha k, 0; \quad 0, \pm \alpha i l', \alpha, l.$$

Nous allons vérifier que *les 16 plans précédents sont des plans tangents singuliers de la surface :* en d'autres termes, chacun de ces plans est tangent à la surface en une infinité de points formant une courbe continue; nous verrons d'ailleurs que cette courbe est une conique. Comme ces 16 plans sont évidemment les transformés de l'un quelconque d'entre eux par les 16 homographies fondamentales, il nous suffira de justifier notre assertion sur l'un d'eux, par exemple sur le plan (15).

Or, les arguments (u, v) des points communs à (S) et au plan (15) satisfont à la relation

$$(16) \qquad ks\,d_1 + l\,ds_1 - 1 = 0;$$

pour établir que la courbe commune à (S) et au plan (15) est une conique comptée deux fois, il suffit de vérifier que les biquadratiques $v = \text{const.}$ coupent cette courbe en deux couples de points confondus (ou, si l'on veut, qu'elles sont bitangentes au plan). L'équation (16) doit alors admettre, quel que soit v, deux racines doubles en u à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes; ces racines doivent donc appartenir à la dérivée

$$kc(dd_1 - klss_1) = 0$$

de (16) par rapport à u. Or la relation

$$(17) \quad \begin{aligned} &1 - (ks\,d_1 + l\,ds_1)^2 \\ &= (k^2s^2 + d^2)(l^2s_1^2 + d_1^2) - (ks\,d_1 + l\,ds_1)^2 = (klss_1 - dd_1)^2 \end{aligned}$$

montre aussitôt que $klss_1 - dd_1$ s'annule bien en tous les points de la courbe en question.

Le calcul que nous venons de faire conduit à écrire sous une forme remarquable l'équation de la surface. En effet, changeons v en $-v$ dans la relation (17), valable quels que soient u et v; elle deviendra

$$(18) \qquad 1 - (ks\,d_1 - l\,ds_1)^2 = (klss_1 + dd_1)^2;$$

multiplions membre à membre (17) et (18); nous aurons *quels que soient u et v*

$$\begin{aligned} &(ks\,d_1 + l\,ds_1 - 1)(ks\,d_1 + l\,ds_1 + 1)(ks\,d_1 - l\,ds_1 - 1)(ks\,d_1 - l\,ds_1 + 1) \\ &\quad = (k^2l^2s^2s_1^2 - d^2\,d_1^2)^2 = (k^2s^2 + l^2s_1^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Mais, *sur la surface*, on a

$$\begin{aligned} ks\,d_1 + l\,ds_1 - 1 &= \beta^{-1}(kx + k'z - \beta) \equiv Q_1, \\ ks\,d_1 + l\,ds_1 + 1 &= \beta^{-1}(kx + k'z + \beta) \equiv Q_2, \\ ks\,d_1 - l\,ds_1 - 1 &= \beta^{-1}(kx - k'z - \beta) \equiv Q_3, \\ ks\,d_1 - l\,ds_1 + 1 &= \beta^{-1}(kx - k'z + \beta) \equiv Q_4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &k^2 s^2 + l^2 s_1^2 - 1 \\ &\quad = \beta^{-2}(\gamma^2 - \alpha^2)^{-1}[\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\beta^2 + \beta^2(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2)] - 1 \\ &\quad = \varphi(x, y, z); \end{aligned}$$

c'est dire que les points de la surface vérifient l'équation

$$\varphi^2 - Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 0.$$

Écrite sous cette forme, l'équation de la surface des ondes montre bien que le plan $Q_1 = 0$ coupe la surface suivant une conique comptée deux fois. *Cette conique est un cercle*, car en cherchant les plans réels qui donnent des sections circulaires dans la quadrique φ, on trouve que ces plans sont parallèles à l'un ou l'autre des deux plans

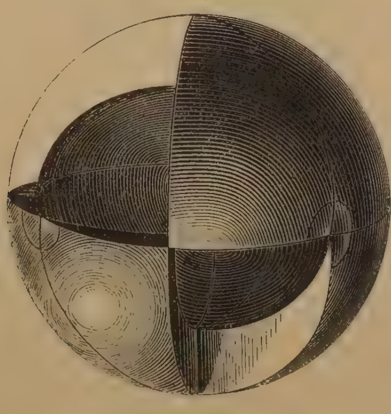
$$(\alpha^2 - \beta^2)x^2 + (\gamma^2 - \beta^2)z^2 = 0$$

ou bien

$$(kx + k'z)(kx - k'z) = 0.$$

Du reste, on pouvait prévoir ce résultat *a priori;* car la comparaison des Tableaux (D) et (E) nous a montré que la conique précédente contient les deux points singuliers $(\beta l, \pm \alpha i, -\alpha k, 0)$ du cercle de l'infini.

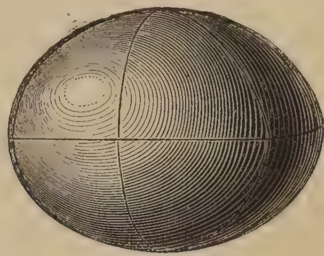
Fig. 12.



La surface est représentée en perspective dans la figure 12; on a ménagé une ouverture qui permet de voir la nappe intérieure, tout en laissant constater l'existence de deux points singuliers et

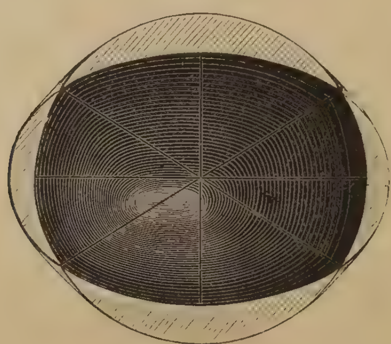
des cercles de contact de deux plans singuliers. On a représenté (*fig.* 13) le corps solide ou noyau qui serait recouvert par la

Fig. 13.



nappe intérieure seule, et (*fig.* 14) la section de la surface par un

Fig. 14.



plan passant par les quatre points coniques réels ($y = 0$). Ces figures sont empruntées au *Traité de Géométrie* de E. Rouché et Ch. de Comberousse, 5e édition, 2e partie, p. 482, 484; Paris, 1883.

Remarque. — La surface des ondes est un cas particulier de la surface du quatrième ordre de Kummer; cette dernière surface, qui appartient à la famille des surfaces hyperelliptiques, a fait l'objet des profondes recherches de G. Humbert [*voir*, par exemple, *Journ. de Math.*, 4e sér., t. IX (1893)].

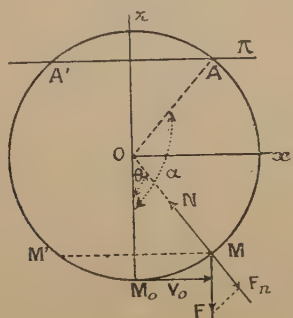
Au sujet de la surface de Kummer on consultera avec profit l'Ouvrage de R. W. H. T. Hudson (*Kummer's quartic surface*, Cambridge, 1905); on trouvera en outre une étude géométrique

détaillée de la surface des ondes dans la Thèse de Doctorat de M. Jules Richard (Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, n° 1072; Châteauroux, 1901).

III. — Pendule simple. Élastique plane. Corde à sauter. Mouvement à la Poinsot.

129. Pendule simple. — Quoique la théorie du pendule simple se déduise comme cas particulier de celle du pendule sphérique que nous avons traitée à l'aide des fonctions $\wp$ et σ, nous la reprenons ici à titre d'application des fonctions sn, cn, dn.

Fig. 15.



Prenons un axe Oz vertical et dirigé vers le haut, l'origine étant au point de suspension du pendule, et supposons le mobile lancé du point le plus bas $M_0 (z = -l)$ avec une vitesse initiale v_0; le théorème des forces vives donne

$$v^2 = 2g(a - z) \quad \text{avec} \quad a = -l + \frac{v_0^2}{2g}.$$

1° Supposons d'abord que la droite $\Pi (z = a)$ coupe le cercle en A, A', c'est-à-dire que l'on ait $a < l$, ou $v_0 < 2\sqrt{lg}$. Le mouvement consistera alors en oscillations isochrones entre A et A'. Prenons pour variable l'angle $M_0OM = \theta$. Nous avons

$$z = -l\cos\theta, \qquad a = -l\cos\alpha.$$

en appelant α l'angle d'écart maximum M_0OA. L'expression de

la vitesse est

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{l\,d\theta}{dt}$$

et l'équation des forces vives devient

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha),$$

qu'on peut écrire

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

d'où

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Nous prendrons le signe + en supposant que le mobile monte. En comptant le temps à partir du moment où le mobile part de M_0 et en posant

$$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2},$$

on a

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad \left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

On est ainsi ramené à une intégrale elliptique et l'équation ci-dessus résolue par rapport à u peut s'écrire

$$u = \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)} = \operatorname{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

on exprime ainsi les coordonnées $l\sin\theta$ et $l\cos\theta$ du mobile par des fonctions uniformes du temps.

Pour avoir le temps T que met le mobile à aller de M_0 en A, il faut faire varier θ de 0 à α, c'est-à-dire u de 0 à 1 ; donc, en posant

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

on aura pour T la valeur $K\sqrt{\frac{l}{g}}$ et la durée de l'oscillation simple sera $2K\sqrt{\frac{l}{g}}$. Si l'on ajoute cette quantité à t, le mobile doit prendre la position M' symétrique de M et $\sin\theta$ doit changer de signe, ce qui fournit une vérification de la formule

$$\operatorname{sn}(x+2K) = -\operatorname{sn} x.$$

2° Il nout faut maintenant considérer le cas où la droite Π ne rencontre pas le cercle, c'est-à-dire où l'on a $a > l$. L'équation des forces vives $v^2 = 2g(a-z)$ peut s'écrire

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a+l\cos\theta) = 2g\left(a+l-2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ou

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a+l)\left(1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

en posant $k^2 = \frac{2l}{a+l}$; k^2 est plus petit que 1 puisque a est plus grand que l. En résolvant par rapport à dt, posant

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l},$$

et prenant $u = \sin\frac{\theta}{2}$ comme nouvelle variable, il vient

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

d'où en résolvant par rapport à u, c'est-à-dire en faisant l'inversion

$$u = \operatorname{sn}\lambda t, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\lambda t.$$

On en déduit

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2\lambda t} = \operatorname{cn}\lambda t.$$

Le temps T que met le mobile à arriver au point le plus haut s'obtient en faisant varier θ de 0 à π, c'est-à-dire u de 0 à 1; il est donc $\frac{K}{\lambda}$.

3° Il reste enfin à traiter le cas intermédiaire où la droite Π serait tangente à la circonférence donnée : $a = l$. On peut alors

effectuer les intégrations à l'aide de fonctions exponentielles (cas de dégénérescence), car le module k des fonctions elliptiques précédentes devient égal à 1. Revenons, en effet, à l'équation des forces vives $v^2 = 2g(a - z)$; nous l'écrirons

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(l + l\cos\theta) = 4gl\cos^2\frac{\theta}{2},$$

et, en intégrant,

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

La constante d'intégration est nulle puisque t doit s'annuler avec θ. Lorsque t croît indéfiniment, θ tend en croissant vers la limite π; le mobile s'approche indéfiniment du point le plus haut sans jamais l'atteindre. On a alors

$$\sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{th}\lambda t, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda t},$$

λ étant égal à $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

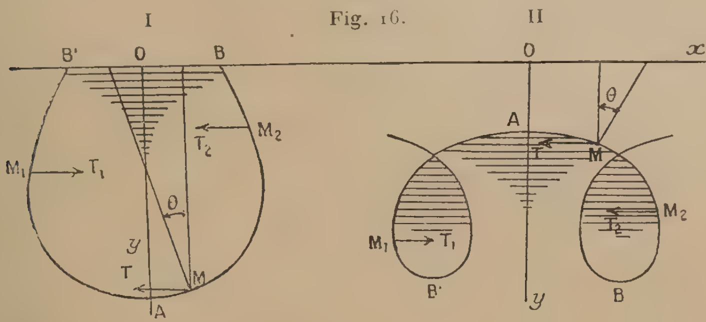
Remarque sur l'interprétation de la période imaginaire $2iK'$. — Plaçons-nous, pour simplifier, dans le premier cas (1°), où le pendule oscille entre les points A et A'. Supposons que la pesanteur change de sens et que le pendule oscille sur l'arc supérieur AzA', entre les mêmes points A et A'. Pour avoir les formules relatives à ce nouveau mouvement, il suffit de changer, dans les formules du premier cas (1°), α en $\pi - \alpha$ et, par suite, de remplacer le module $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ par son complémentaire $k' = \cos\frac{\alpha}{2}$. Les fonctions elliptiques qui donnent le nouveau mouvement sont donc construites avec le module complémentaire de k et, en particulier, la durée de la nouvelle oscillation simple est $2K'\sqrt{\frac{l}{g}}$ (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 1074).

130. Élastique plane sans pression. — Nous avons déjà vu (n° 70) que le problème de l'élastique gauche conduit aux mêmes équations que l'étude du mouvement d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe.

En particulier, le problème de l'élastique plane sans pression conduit aux mêmes équations que l'étude du mouvement d'un pendule simple. C'est ce que nous allons montrer rapidement.

Imaginons une tige élastique dont la fibre moyenne affecte à l'état naturel, la forme d'une courbe plane connue C_0 et soit ρ_0

Fig. 16.



la valeur du rayon de courbure en un point M de cette courbe. Supposons ensuite qu'on déforme la tige en faisant agir sur elle des forces quelconques, mais de telle façon que la fibre moyenne reste plane et prenne une nouvelle forme C. Le rayon de courbure en M devient alors ρ. Dans cette position d'équilibre contraint, les forces élastiques sont déterminées d'après les lois suivantes :

Si l'on coupait la tige en M, pour maintenir l'équilibre il faudrait appliquer à la section en M une force T dans le plan de la courbe C et un couple dont l'axe est perpendiculaire à ce plan et dont le moment N est proportionnel à la variation de la courbure $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$:

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

B désignant un coefficient constant qui dépend de la nature de la tige.

Nous traiterons ici le cas simple où la tige est primitivement *rectiligne*, $\frac{1}{\rho_0} = 0$, et où l'on fait agir seulement sur ses extrémités M_1 et M_2 deux forces T_1 et T_2 situées dans le plan de la courbe d'équilibre et deux couples N_1 et N_2 ayant leurs axes normaux à ce plan. *Les deux forces* T_1 *et* T_2 *sont égales et opposées.*

car les seules forces extérieures appliquées à la tige en équilibre étant les forces T_1 et T_2 et les couples N_1 et N_2, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque doit être nulle. Les forces T_1 et T_2 forment alors un couple qui fait équilibre aux couples N_1 et N_2.

Prenons pour axe Ox une droite parallèle à T_1 et T_2. Soit M un point quelconque de la fibre moyenne : si la tige était coupée en M la partie M_1M serait en équilibre sous l'action des forces extérieures suivantes : 1° la force T_1 et le couple N_1 agissant sur l'extrémité M_1 ; 2° une force T et un couple N agissant sur M ; le couple N a d'ailleurs pour moment

$$N = \frac{B}{\rho},$$

puisque nous supposons $\frac{1}{\rho_0} = 0$.

Ces forces extérieures appliquées à l'arc M_1M se font équilibre. Donc, T est égal et opposé à T_1. En outre, la somme des moments de toutes les forces extérieures, par rapport à un point du plan doit être nulle. En prenant la somme des moments par rapport à O, nous avons

$$T_1 y_1 - T y - N_1 + N = 0,$$

d'où, en remplaçant T par T_1 et N par $\frac{B}{\rho}$, une équation de la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2}(y - b),$$

c^2 désignant une constante positive et b une autre constante. On peut toujours déplacer l'axe des x parallèlement à lui-même de façon à faire disparaître cette dernière constante et à ramener ainsi l'équation de la courbe à la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2}.$$

Nous allons montrer que, lorsqu'un point décrit la courbe élastique avec une vitesse constante, la normale en ce point oscille comme un pendule autour de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne d'action des forces T, c'est-à-dire sur Ox [1].

---

[1] *Comparer* à GREENHILL, *Fonctions elliptiques*, tr. par J. Griess; Paris, 1895, p. 125.

Soit, en effet, θ l'angle de la normale en M avec cette perpendiculaire; si le point mobile se déplace de ds la normale tourne de l'angle $d\theta$ et l'on a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2},$$

d'où, par différentiation,

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{c^2}\sin\theta.$$

Si l'on pose $\frac{s}{c} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, on retrouve l'équation du mouvement pendulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Pour intégrer l'équation (1), multiplions les deux membres par $\frac{d\theta}{ds}$ et intégrons : il vient

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{c^2}(\cos\theta + \mu),$$

μ désignant une constante arbitraire. On a alors

$$y = \frac{c^2}{\rho} = c^2\frac{d\theta}{ds} = c\sqrt{2(\cos\theta + \mu)}.$$

Trois cas sont à distinguer, correspondant aux trois cas rencontrés dans le pendule simple, suivant que μ est compris entre -1 et $+1$, supérieur à 1, ou égal à 1.

Premier cas. — Dans le premier cas on peut poser

$$\mu = -\cos\alpha.$$

L'angle θ varie de $-\alpha$ à $+\alpha$; la courbure et l'ordonnée y s'annulent pour $\theta = \alpha$.

On a ainsi la forme de la courbe (*fig.* 16, I). Les points correspondant à $\theta = \pm\alpha$ sont les points B et B'. Cette forme de courbe correspond au mouvement oscillatoire du pendule.

On a trouvé dans ce cas, pour le pendule,

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

avec $k = \sin\frac{\alpha}{2}$. On a donc actuellement par le même calcul, en faisant $\frac{s}{c} = t\sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn}\frac{s}{c}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}\frac{s}{c},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{c}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{c}\operatorname{cn}\frac{s}{c},$$

$$y = \frac{c^2}{\rho} = 2kc\operatorname{cn}\frac{s}{c}.$$

Calculons enfin x en fonction de s, on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2k^2\operatorname{sn}^2\frac{s}{c};$$

d'où, en intégrant de 0 à t et se rappelant la formule du n° 102,

$$\int_0^u k^2\operatorname{sn}^2 u\,du = -\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

$$x = s\left[1 - 2\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right] + 2c\frac{\Theta'\left(\frac{s}{c}\right)}{\Theta\left(\frac{s}{c}\right)}.$$

Deuxième cas. — Si l'on a $\mu > 1$, θ peut varier de 0 à 2π : y et $\frac{1}{\rho}$ ne s'annulent jamais; la courbe a la forme II de la figure 16. Ce cas correspond au mouvement révolutif du pendule. On achèverait le calcul comme dans le cas précédent, en employant les mêmes transformations que pour le mouvement révolutif du pendule simple.

Troisième cas. — Si $\mu = 1$, on se trouve dans un cas de dégénérescence. On a alors

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{4}{c^2}\cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{ds}{c} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{s}{c} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{s}{c}}$$

et

$$y = 2c\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4c}{e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}} = \frac{2c}{\operatorname{ch}\frac{s}{c}},$$

$$dx = \cos\theta\, ds = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) ds = 2c\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{2} - ds,$$

$$x = 2c\sin\frac{\theta}{2} - s = 2c\,\frac{e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}}{e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}} - s = 2c\operatorname{th}\frac{s}{c} - s.$$

La courbe est alors asymptote à l'axe Ox, comme on le voit en faisant tendre θ vers $\pm\pi$, et s vers $\pm\infty$.

131. Corde à sauter. — Imaginons une corde homogène dont on tient les deux extrémités et qu'on fait tourner très vite autour de la droite joignant ces deux extrémités. On peut alors négliger l'action de la pesanteur sur les divers éléments de la corde et chercher la figure permanente que prend la corde dans son mouvement. Par rapport à un système d'axes tournant avec la corde, cette figure permanente est une position d'équilibre relatif. D'après la théorie de l'équilibre relatif, on doit exprimer qu'il y a équilibre entre les forces agissant réellement sur chaque élément de la corde et les forces centrifuges.

La force centrifuge agissant sur un élément de masse m est perpendiculaire à l'axe de rotation et répulsive; elle a pour intensité $m\omega^2 r$, ω désignant la vitesse angulaire constante de la rotation et r la distance de l'élément m à l'axe.

En prenant l'axe de rotation pour axe Ox, on est donc ramené à un problème sur l'équilibre des fils que l'on peut énoncer ainsi :

Un fil est attaché en deux points de l'axe Ox et chaque élément du fil est repoussé par l'axe proportionnellement à sa longueur et à sa distance à l'axe.

Toutes les forces qui agissent sur le fil rencontrant l'axe Ox, le moment de la tension par rapport à cet axe est constant, tout le long du fil; mais, comme le fil attaché en deux points de l'axe, le moment de la tension aux extrémités est *nul;* ce moment est

donc constamment nul et l'on a

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = 0, \qquad y = mz,$$

m étant une constante. La figure d'équilibre est donc dans un plan passant par l'axe Ox. Prenons ce plan pour plan des xy, la force agissant sur l'élément ds est perpendiculaire à Ox, répulsive et proportionnelle à l'ordonnée y

$$Y\,ds = \mu y\,ds.$$

Les équations d'équilibre sont donc

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \mu y\,ds = 0;$$

la première donne $T\dfrac{dx}{ds} = A$, où l'on peut toujours supposer A positif en comptant les arcs s dans un sens tel que x croisse avec s; en portant cette valeur de T dans la deuxième équation et posant

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{\mu}{A} = \frac{2}{a^2}, \qquad ds = dx\sqrt{1+y'^2} = \frac{dy\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

on a l'équation

$$\frac{y'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{2y\,dy}{a^2} = 0,$$

et en intégrant

$$\sqrt{1+y'^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

b^2 désignant une constante nécessairement positive puisque le premier membre est positif. Isolant le radical, élevant au carré et remettant pour y' sa valeur $\dfrac{dy}{dx}$, on a

$$dx = \pm\frac{a^2\,dy}{\sqrt{(b^2-y^2)^2 - a^4}}.$$

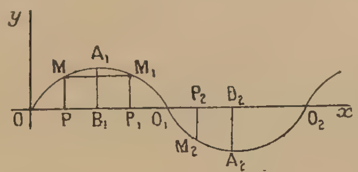
Comme le fil est attaché à l'axe Ox, l'équation doit donner une

valeur réelle pour y' quand $y = 0$, donc $b^2 > a^2$. En désignant par $\varphi(y)$ le polynome bicarré placé sous le radical, on a

$$\varphi(y) = (b^2 + a^2 - y^2)(b^2 - a^2 - y^2);$$

y partant de zéro ne peut varier qu'entre $-\sqrt{b^2 - a^2}$ et $+\sqrt{b^2 - a^2}$. Construisons la courbe. Supposons que le fil soit attaché en O (*fig.* 17) et qu'il soit situé dans l'angle $y\mathrm{O}x$: alors x croît

Fig. 17.



d'abord avec y, $\dfrac{dx}{dy}$ est positif, et l'on a

$$(\mathrm{C}) \qquad x = \int_0^y \frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

y croissant, x croît, jusqu'à ce que $y = \sqrt{b^2 - a^2}$; x atteint alors la valeur

$$\xi = \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} \frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

on a ainsi la branche OA_1 ; la tangente en A_1 est *horizontale*. A partir de cette valeur, y décroît et, pour que x continue à croître, il faut prendre le signe $-$ devant $\sqrt{\varphi(y)}$: on a ainsi une nouvelle branche $\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{O}_1$ symétrique de la première OMA_1 par rapport à l'ordonnée $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, car à des variations égales de y correspondent des variations égales de x. Pour $y = 0$ on obtient le point O_1 d'abscisse 2ξ; puis, y devenant négatif peut décroître jusqu'à la valeur $-\sqrt{b^2 - a^2}$, l'abscisse croît toujours jusqu'à la valeur 3ξ, ce qui donne le point A_2, où la tangente est horizontale. Ensuite y augmente de nouveau de $-\sqrt{b^2 - a^2}$ à $+\sqrt{b^2 - a^2}$; il faut prendre, à partir de A_2, le signe $+$ devant le radical, et l'on obtient l'arc $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2\mathrm{A}_3$ coupant l'axe au point O_2 d'abscisse 4ξ, etc. Les branches de courbe ainsi obtenues successivement sont toutes

égales à la première. La courbe est donc analogue à une *sinusoïde*.

Intégrons les équations par les fonctions elliptiques. Faisons dans l'équation (C) de la courbe

$$(1) \qquad y = t\sqrt{b^2 - a^2}, \qquad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 1, \qquad 1 - k^2 = k'^2 = \frac{2a^2}{b^2 + a^2};$$

elle prend la forme suivante :

$$\frac{x\sqrt{2}}{ak'} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};$$

d'où

$$t = \operatorname{sn}\frac{x\sqrt{2}}{ak'}, \qquad y = \sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sn}\frac{x\sqrt{2}}{ak'}.$$

Ainsi la courbe donne la représentation graphique de la variation de la fonction sn.

La différentielle ds de l'arc de courbe est

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \frac{(b^2 - y^2)\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

en faisant dans cette formule la substitution (1) ci-dessus, on trouve pour l'abscisse ξ du point A_1 et la longueur λ de l'arc OA_1 les deux expressions

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{ak'}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \dfrac{ak'}{\sqrt{2}}\mathrm{K}, \\[2ex] \lambda = \dfrac{a}{k'\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{(1 + k^2 - 2k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \end{cases}$$

car le point A_1 s'obtient en faisant $t = 1$.

Quand λ et ξ sont *donnés* (λ étant supérieur à ξ, car l'arc OA_1 est supérieur à sa projection OB_1), les constantes a et k^2 ont un seul système de valeurs, sous la condition $k^2 < 1$. En effet, en calculant $\lambda - \xi$ et $\lambda + \xi$, on trouve

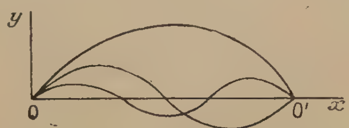
$$(3) \qquad \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} = k^2 \frac{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt}.$$

Pour $k^2 = 0$, le rapport du second membre est nul; k^2 augmentant, le numérateur augmente évidemment et le dénominateur diminue, donc le rapport augmente et pour $k^2 = 1$ le rapport est 1. Ce rapport passe donc une fois et une seule fois par la valeur donnée $\frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi}$. La constante k^2 a donc une valeur et une seule; l'expression (2) de ξ donne alors pour a une seule valeur $\frac{\xi\sqrt{2}}{\mathrm{K}k'}$.

Détermination des constantes. — Le fil ayant une longueur donnée l et étant attaché au point O et au point O′ de l'axe Ox d'abscisse α, il y a une infinité de cas possibles.

1° Le fil n'a qu'une seule onde entre O et O′ (*fig.* 18). Alors ξ

Fig. 18.



est la moitié de α, λ la moitié de l. Les quantités ξ et λ étant connues, la constante k^2 a une seule valeur donnée par l'équation (3); puis $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\mathrm{K}k'}$, ...

2° Le fil a deux ondes entre O et O′. Alors $\xi = \frac{\alpha}{4}$, $\lambda = \frac{l}{4}$; k^2 a la même valeur que dans le cas précédent, car $\frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi}$ a la même valeur, $\frac{l - \alpha}{l + \alpha}$; ensuite $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4\mathrm{K}k'}$, ...

En général, si le fil a n ondes entre O et O′, $\xi = \frac{\alpha}{2n}$, $\lambda = \frac{l}{2n}$, k^2 a toujours la même valeur, mais $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2n\mathrm{K}k'}$.

Il y a donc une infinité de positions d'équilibre qui sont toutes homothétiques de la première par rapport à O, les rapports d'homothétie étant $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$.

132. Mouvements à la Poinsot. — Étudions le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O, dans le cas où les forces ont une résultante unique passant par le point O.

En prenant pour axes liés au corps les trois axes principaux d'inertie relatifs au point O, $Oxyz$, on a, pour déterminer les composantes p, q, r de la rotation instantanée suivant ces axes, les trois équations suivantes, dans lesquelles A, B, C sont les moments d'inertie principaux ($A > B > C$), D et μ des constantes arbitraires [1],

$$(1)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0. \end{cases}$$

Nous tirerons p et r des deux premières équations et, en les portant dans la troisième, nous aurons une équation différentielle du premier ordre en q. L'élimination de r entre les deux premières équations donne

$$Ap^2(A - C) + Bq^2(B - C) = D(D - C)\mu^2.$$

D'après les grandeurs relatives de A, B, C, on voit que la différence $D - C$ est essentiellement positive : elle ne pourrait être nulle que si les valeurs initiales p_0 et q_0 de p et q étaient nulles.

De l'équation ci-dessus on tire

$$p^2 = \frac{B(B - C)}{A(A - C)}(f^2 - \quad)$$

en posant

$$f^2 = \mu^2\frac{D(D - C)}{B(B - C)};$$

on aurait par un calcul semblable

$$(2)\qquad r^2 = \frac{B(A - B)}{C(A - C)}(g^2 - q^2), \qquad g^2 = \mu^2\frac{D(A - D)}{B(A - B)},$$

le binome $A - D$ étant essentiellement positif et ne pouvant être nul que si q_0 et r_0 sont nuls.

Pour que p et r restent réels, il faut que q^2 reste inférieur à la plus petite des deux quantités f^2 et g^2; pour reconnaître cette quantité, formons la différence $g^2 - f^2$:

$$g^2 - f^2 = \mu^2\frac{D(A - C)(B - D)}{B(B - C)(A - B)}.$$

---

[1] *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II, Chap. XX.

Le signe de $g^2 - f^2$ est donc celui de $B - D$, signe connu par les conditions initiales.

Pour fixer les idées, nous supposerons

$$B - D > 0, \qquad g^2 > f^2.$$

La variable q doit alors varier entre $-f$ et $+f$: donc r ne s'annule jamais et conserve toujours le même signe, signe connu par la valeur initiale r_0 : nous supposerons $r > 0$. Au contraire, p s'annule toutes les fois que $q = \pm f$; quand q augmente, $\dfrac{dq}{dt}$ est positif, la troisième des équations (1) montre que p est alors négatif; quand q diminue, p est positif. Ces considérations fixent à chaque instant les signes à prendre devant les radicaux qui donnent p et r en fonction de q.

En portant ces valeurs de p et r dans la troisième des équations (1), on trouve,

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(B - C)(A - B)}{AC}} \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)},$$

où le radical est pris positivement tant que q augmente, jusqu'au moment où q atteint la valeur $+f$; puis, q décroissant de $+f$ à $-f$, le radical doit être pris négativement, et ainsi de suite.

On voit que t est donné en fonction de q par une intégrale que nous ramènerons à la forme considérée dans le Chapitre précédent, en posant

$$q = fs, \qquad k^2 = \frac{f^2}{g^2} = \frac{(A - B)(D - C)}{(B - C)(A - D)}.$$

Nous aurons ainsi, en résolvant par rapport à dt et intégrant,

$$n(t - t_0) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}},$$

où n désigne la constante positive

$$n = \mu \sqrt{\frac{D(A - D)(B - C)}{ABC}}$$

et t_0 une nouvelle constante arbitraire, représentant l'époque où q s'annule en croissant. Le module k^2 est moindre que 1 puisque $g^2 > f^2$; il est égal au rapport anharmonique de A, C, B, D.

Ces formules donnent p, q, r en fonctions uniformes du temps. En effet, en posant, pour abréger,

$$\tau = n(t - t_0),$$

l'inversion de l'intégrale elliptique donne

$$s = \operatorname{sn}\tau;$$

$$(3)\quad \begin{cases} q = fs & = \mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{B(B-C)}}\operatorname{sn}\tau, \\ p = f\sqrt{\dfrac{B(B-C)}{A(A-C)}}\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\tau} & = \varepsilon'\mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{A(A-C)}}\operatorname{cn}\tau, \\ r = g\sqrt{\dfrac{B(A-B)}{C(A-C)}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\tau} & = \varepsilon''\mu\sqrt{\dfrac{D(A-D)}{C(A-C)}}\operatorname{dn}\tau, \end{cases}$$

où μ est positif et où ε', ε'' sont égaux à ± 1.

D'après les propriétés des fonctions sn, cn, dn, ces formules montrent que p et q s'annulent périodiquement, tandis que r ne s'annule jamais.

Si nous supposons $r_0 > 0$, r reste constamment positif et il faut prendre $\varepsilon'' = +1$. Alors, d'après la troisième équation ($'$), on voit immédiatement que $\dfrac{dq}{dt}$ et p doivent être de signes contraires, ce qui, d'après la formule

$$\frac{d\operatorname{sn}\tau}{d\tau} = \operatorname{cn}\tau\operatorname{dn}\tau,$$

montre que $\varepsilon' = -1$.

Les valeurs de p, q, r sont des fonctions périodiques de t et admettent la période

$$T = \frac{4K}{n} = \frac{4}{n}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Quand le temps augmente de cette quantité, p, q, r reprennent les mêmes valeurs; l'axe instantané de rotation reprend alors sa position primitive dans le corps, mais non dans l'espace, comme nous le verrons plus loin.

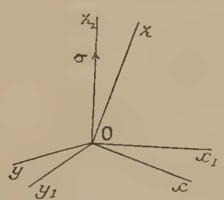
Il faut maintenant calculer les trois angles d'Euler en fonction du temps. Pour simplifier le calcul, nous supposerons qu'on ait pris pour axe des z_1 la direction invariable de l'axe $O\sigma$ du moment

résultant des quantités de mouvement. Écrivons que les projections du vecteur $\overrightarrow{O\sigma}$, de longueur $l = \mu D$, sur les axes mobiles sont respectivement Ap, Bq, Cr, nous aurons

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} l \sin\theta \sin\varphi &= Ap, \\ l \sin\theta \cos\varphi &= Bq, \\ l \cos\theta &= Cr; \end{aligned} \right.$$

car les cosinus γ, γ', γ'' des angles de Ox, Oy, Oz avec Oz_1 sont

Fig. 19.



$\sin\theta \sin\varphi$, $\sin\theta \cos\varphi$ et $\cos\theta$. Ces équations donnent, sans intégration, θ et φ en fonction de p, q, r et, par suite, en fonction de t.

Calcul de l'angle de précession ψ. — On a, d'après les équations du mouvement,

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu D \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}.$$

Remplaçons, dans cette expression, p et q par leurs valeurs (3) et $\operatorname{cn}^2\tau$ par $1 - \operatorname{sn}^2\tau$; nous avons

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{n} \frac{(B - C) - (B - A)\operatorname{sn}^2\tau}{A(B - C) - C(B - A)\operatorname{sn}^2\tau},$$

ce qu'on peut encore écrire, en effectuant la division,

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{\mu D}{nC} \frac{(C - A)(B - C)}{A(B - C) - C(B - A)\operatorname{sn}^2\tau}.$$

Pour mettre en évidence les pôles de la fonction doublement périodique du second membre, déterminons un argument constant ic vérifiant la relation

$$(5) \qquad \operatorname{sn}^2 ic = \frac{A(B - C)}{C(B - A)};$$

comme $A > B$, la valeur de $\operatorname{sn} ic$ est purement imaginaire : on peut donc prendre, pour l'argument ic, une valeur purement imaginaire, et, par suite, pour c, une valeur réelle. Nous pourrons alors écrire

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C-A)(B-C)}{C(B-A)}\,\frac{1}{\operatorname{sn}^2 ic - \operatorname{sn}^2\tau}.$$

D'après les relations élémentaires qui lient les fonctions sn, cn, dn d'un même argument, on tire de (5)

$$\operatorname{cn}^2 ic = \frac{B(A-C)}{C(A-B)}, \qquad \operatorname{dn}^2 ic = \frac{D(A-C)}{C(A-D)}.$$

Extrayant les racines carrées et tenant compte de la valeur de n, on trouve

$$i \operatorname{sn} ic \operatorname{cn} ic \operatorname{dn} ic = \frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C-A)(B-C)}{C(B-A)}.$$

Il faudrait mettre un double signe devant le deuxième membre; mais, comme on peut changer le signe de ic sans que les relations antérieures soient changées, on peut toujours prendre le signe $+$ devant le second membre. L'équation qui donne $\frac{d\psi}{d\tau}$ s'écrit alors

$$(6) \qquad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{i \operatorname{sn} ic \operatorname{cn} ic \operatorname{dn} ic}{\operatorname{sn}^2 ic - \operatorname{sn}^2\tau}.$$

Cette expression est maintenant aisée à intégrer : il suffit pour cela de décomposer le second membre en éléments simples. Or, nous avons établi, dans le n° **102**, la formule

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = Z(u-a) - Z(u+a) + 2\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

On a donc, en faisant $a = ic$, $u = \tau$, et désignant par λ la constante réelle $\frac{\mu D}{nC} - i\frac{\Theta'(ic)}{\Theta(ic)}$,

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \lambda + \frac{i}{2}\,\frac{H'(ic-\tau)}{H(ic-\tau)} + \frac{i}{2}\,\frac{H'(ic+\tau)}{H(ic+\tau)}.$$

Intégrant et supposant les axes choisis de telle façon que ψ s'annule avec τ, on a enfin

$$(7) \qquad \psi = \lambda\tau + \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{H(ic+\tau)}{H(ic-\tau)}.$$

Les trois angles θ, φ, ψ sont ainsi exprimés en fonction du temps, et l'on peut déterminer la position du corps à un instant quelconque. Les sinus et cosinus de ces trois angles s'expriment par des fonctions du temps qui sont ou uniformes ou racines carrées de fonctions uniformes. Mais il est très remarquable, comme l'a montré Jacobi, que les neuf cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont des fonctions uniformes du temps. Ce résultat peut s'établir comme il suit. Les formules (4) donnent déjà γ, γ', γ'' en fonctions uniformes de t. On en conclut

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}{D\mu}$$

ou, en remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs,

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{C(A-B)(D-C)}{D(A-C)(B-C)}}\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau - \frac{A(B-C)}{C(B-A)}}.$$

D'après l'expression du module k^2 et les formules définissant $\operatorname{sn}^2 ic$, $\operatorname{cn}^2 ic$, $\operatorname{dn}^2 ic$, on peut écrire

$$\sin\theta = \frac{k}{\operatorname{dn} ic}\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 ic}.$$

Mais on a obtenu la formule (n° 102)

$$\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u = \frac{\Theta^2(0)}{k}\,\frac{H(a-u)H(a+u)}{\Theta^2(a)\Theta^2(u)};$$

en y remplaçant a par τ et u par ic, et remarquant que, par définition, $\operatorname{dn} ic = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\,\frac{\Theta_1(ic)}{\Theta(ic)}$ et $\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$, on trouve

(8) $$\sin\theta = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(ic)\Theta(\tau)}\sqrt{H(\tau - ic)H(\tau + ic)}.$$

D'autre part, l'expression (7) donne

$$e^{i\psi} = i\,e^{i\lambda\tau}\sqrt{\frac{H(\tau - ic)}{H(\tau + ic)}};$$

donc

$$e^{i\psi}\sin\theta = \frac{iH_1(0)}{\Theta_1(ic)}\,\frac{H(\tau - ic)}{\Theta(\tau)}\,e^{i\lambda\tau},$$

$$e^{-i\psi}\sin\theta = -\frac{iH_1(0)}{\Theta_1(ic)}\,\frac{H(\tau + ic)}{\Theta(\tau)}\,e^{-i\lambda\tau}.$$

A l'aide de ces expressions on forme facilement les valeurs des cosinus α, α', α'', β, β', β'', en fonctions du temps. Il suffit de partir des formules donnant ces cosinus en fonction des angles d'Euler et d'y remplacer ensuite les angles d'Euler par leurs valeurs en fonction de τ.

Nous trouverons plus loin ces mêmes cosinus par une autre voie.

Cas de dégénérescence. — La valeur du module est donnée par

$$k^2 = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}.$$

Ce module est *nul* quand $A = B$, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution (on a $D > C$; p. 212). Les fonctions elliptiques deviennent alors des fonctions circulaires.

Le module est égal à l'*unité* quand $D = B$: dans ce cas les angles θ, φ, ψ et les neuf cosinus s'expriment comme il suit : la fonction $s = \operatorname{sn}\tau$ devient $\operatorname{th}\tau$ ou $-i\operatorname{tang} i\tau$, et les fonctions $\operatorname{cn}\tau$ et $\operatorname{dn}\tau$ se réduisent à $\sqrt{1-s^2}$ ou à $\frac{1}{\operatorname{ch}\tau} = \frac{1}{\cos i\tau}$. En introduisant un argument purement imaginaire ic défini par la relation (5), c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}^2 c = \frac{A(B-C)}{C(A-B)}, \qquad \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{B(A-C)}{C(A-B)},$$

on remplacera la formule (6) par

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu B}{nC} + \frac{\operatorname{tang} c}{\cos^2 c}\,\frac{1}{\operatorname{tang}^2 c - \operatorname{tang}^2 i\tau},$$

qui donne, en intégrant et désignant par λ la constante $\frac{\mu B}{nC} + \operatorname{tang} c$,

$$\psi = \lambda\tau - \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{\sin(c+i\tau)}{\sin(c-i\tau)}.$$

On déduit de là les expressions des neuf cosinus.

133. Herpolhodie. — Dans la représentation du mouvement, d'après Poinsot, la *polhodie* est une courbe algébrique ; cherchons les équations de l'*herpolhodie* ou lieu du pôle m sur le plan fixe [1].

---

(1) *Voir* Appell, *Mécanique*, t. II, Chap. XX.

En appelant x, y, z les coordonnées du pôle m par rapport aux axes principaux d'inertie $Oxyz$, on a, puisque le rapport $\frac{\omega}{Om}$ est constant et égal à $\sqrt{h}$ ou $\mu\sqrt{D}$,

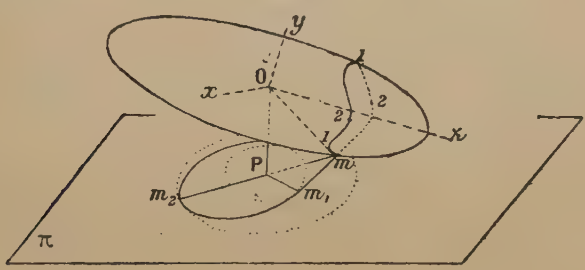
$$\frac{p}{x}=\frac{q}{y}=\frac{r}{z}=\frac{\omega}{Om}=\mu\sqrt{D}. \tag{9}$$

Comme p, q, r sont des fonctions elliptiques de t, il en est de même de x, y, z. Les équations d'Euler, dans lesquelles on remplace p, q, r par $x\mu\sqrt{D}$, $y\mu\sqrt{D}$, $z\mu\sqrt{D}$, donnent

$$A\frac{dx}{dt}+\mu\sqrt{D}(C-B)yz=0, \quad B\frac{dy}{dt}+\mu\sqrt{D}(A-C)zx=0, \quad \ldots. \tag{10}$$

Appelons P la projection du point O sur le plan fixe Π, qui

Fig. 20.



contient l'herpolhodie, et désignons par ρ et χ les coordonnées polaires d'un point m de la courbe rapportée au point P. Comme

$$OP=\frac{1}{\sqrt{D}},$$

on a les équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=\rho^2+\frac{1}{D},\\ &A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2=1,\\ &A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=D, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

dont la première exprime que $\overline{Om}^2=\overline{Pm}^2+\overline{OP}^2$, et dont les dernières sont les équations de la polhodie. Résolvant ces équa-

tions par rapport à x^2, y^2, z^2, on a, en posant

$$\Delta = (B - C)(C - A)(A - B)$$

et

$$a = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD}, \qquad b = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},$$

$$c = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD},$$

$$(12) \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{BC(C-B)}{\Delta}(\rho^2 - a), \qquad y^2 = \dfrac{CA(A-C)}{\Delta}(\rho^2 - b), \\ z^2 = \dfrac{AB(B-A)}{\Delta}(\rho^2 - c). \end{cases}$$

Nous avons supposé $A > B > C$ et D compris entre B et C (p. 213); alors Δ est négatif, et l'on a $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$. Donc z^2 est essentiellement positif et ne s'annule jamais, ce qui est d'accord avec le fait que r ne s'annule jamais. Pour que x^2 et y^2 soient positifs, il faut que $\rho^2 - a$ soit positif et $\rho^2 - b$ négatif : ρ^2 oscille donc entre a et b. Ainsi le rayon vecteur de l'herpolhodie oscille entre un minimum $\sqrt{a}$ et un maximum $\sqrt{b}$.

En différentiant la première des équations (11), on a

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}$$

ou, en tenant compte des équations (10),

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \mu\sqrt{D}xyz\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) = -\frac{\mu\Delta\sqrt{D}xyz}{ABC};$$

cette équation donne enfin, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (12),

$$(13) \qquad \rho\frac{d\rho}{dt} = \mu\sqrt{D}\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)},$$

équation qui permettrait de retrouver ρ^2 en fonction de t par une fonction elliptique; cette expression de ρ^2 en fonction de t nous est déjà connue, puisque x, y, z sont des fonctions elliptiques de t.

Appelons χ l'angle polaire que fait le rayon Pm de l'herpolhodie avec une direction fixe de II; l'expression $\rho^2\frac{d\chi}{dt}$ représente le moment par rapport à OP de la vitesse du point m, cette vitesse

étant estimée par rapport au système fixe de référence. Mais m étant sur l'axe instantané de rotation a même vitesse par rapport au système fixe et par rapport au corps mobile ; nous pouvons donc écrire :

$$\rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \Sigma\gamma\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

la sommation étant étendue aux trois axes mobiles. Or, nous avons remarqué (p. 215) que $Ap = \gamma D\mu$, ce qui donne $\gamma = \frac{Ax}{\sqrt{D}}$; en vertu de (10) nous aurons donc

$$\rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \mu \begin{vmatrix} Ax & By & Cz \\ x & y & z \\ \frac{B-C}{A}yz & \frac{C-A}{B}zx & \frac{A-B}{C}xy \end{vmatrix};$$

au moyen de (12), on obtient ensuite l'équation

$$\rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2 + E), \tag{14}$$

où E désigne la constante négative $\frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}$, c'est-à-dire $-\sqrt{-abcD}$.

Les deux relations (13) et (14) donnent ρ et χ en fonction du temps. L'élimination de dt fournit l'équation différentielle de l'herpolhodie

$$d\chi = \frac{(\rho^2 + E)\,d\rho}{\rho\sqrt{D}\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}}, \tag{15}$$

qui donne χ par une quadrature.

Ceci posé, nous allons vérifier que

$$\rho\, e^{i\chi} = \rho\cos\chi + i\rho\sin\chi$$

s'exprime en fonction uniforme du temps. On a d'abord immédiatement ρ^2 en remplaçant, dans l'équation (12),

$$y^2 = \frac{CA(A-C)}{\Delta}(\rho^2 - b),$$

y^2 par sa valeur en fonction du temps

$$y^2 = \frac{q^2}{\mu^2 D} = \frac{D-C}{B(B-C)}\,\mathrm{sn}^2\tau$$

On trouve ainsi

$$\rho^2 = \frac{(D-C)(A-D)}{CAD} - \frac{(A-B)(D-C)}{ABC}\,\mathrm{sn}^2\tau$$

ou bien

$$\rho^2 = -\frac{(A-B)(D-C)}{ABC}(\mathrm{sn}^2\tau - \mathrm{sn}^2 v),$$

en posant

$$\mathrm{sn}^2 v = \frac{(A-D)B}{(A-B)D},$$

Les relations

$$\mathrm{cn}^2 v = 1 - \mathrm{sn}^2 v, \qquad \mathrm{dn}^2 v = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 v, \qquad k^2 = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}$$

donnent $\mathrm{cn}\,v$ et $\mathrm{dn}\,v$. Rapprochons les trois résultats suivants :

$$\mathrm{sn}^2 v = \frac{B(A-D)}{D(A-B)}, \qquad \mathrm{cn}^2 v = -\frac{A(B-D)}{D(A-B)}, \qquad \mathrm{dn}^2 v = \frac{C(B-D)}{D(B-C)}.$$

Pour obtenir χ nous partirons de l'égalité (14) qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \mu + \frac{\mu E}{\rho^2},$$

et, en remplaçant ρ^2 par sa valeur en fonction de τ et dt par $\frac{1}{n}d\tau$,

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{\mu}{n} + \frac{\mu}{n}\,\frac{(A-D)(B-D)}{D(A-B)}\,\frac{1}{\mathrm{sn}^2\tau - \mathrm{sn}^2 v}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples en nous servant de la formule

$$\frac{2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2\tau} = -2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{H'(v-\tau)}{H(v-\tau)} + \frac{H'(v+\tau)}{H(v+\tau)}.$$

Nous déduirons d'abord des valeurs de $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$ et n la relation

$$\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v = -\frac{\mu^2}{n^2}\left[\frac{(A-D)(B-D)}{D(A-B)}\right]^2,$$

et nous pourrons ensuite écrire

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{i}\,\frac{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}^2\tau - \mathrm{sn}^2 v},$$

puis

$$2i\frac{d\chi}{d\tau} = 2i\frac{\mu}{n} + 2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{H'(\tau-v)}{H(\tau-v)} - \frac{H'(\tau+v)}{H(\tau+v)}.$$

On déduit de là

$$e^{2i\chi} = e^{2\tau\left[\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{i\mu}{n}\right] + 2i\nu} \frac{H(\tau - v)}{H(\tau + v)},$$

ν désignant une constante arbitraire.

D'autre part, on a

$$\rho^2 = -\frac{(A - B)(D - C)}{ABC}(\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 v)$$

ou, d'après une formule déjà rappelée (p. 150),

$$\rho^2 = -\frac{(A - B)(D - C)}{ABC} \frac{\Theta^2(0)}{k} \frac{H(\tau - v) H(\tau + v)}{\Theta^2(\tau)\Theta^2(v)}.$$

On voit alors que $\rho^2 e^{2i\chi}$ est le carré d'une fonction uniforme et l'on obtient

$$\rho e^{i\chi} = N e^{\tau\left[\frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right] + i\nu} \frac{H(\tau - v)}{\Theta(\tau)},$$

en posant

$$N^2 = -\frac{(A - B)(D - C)}{ABC} \frac{\Theta^2(0)}{k\Theta^2(v)} = -\frac{k^2 n^2}{D\mu^2} \frac{\Theta^2(0)}{k\Theta^2(v)};$$

la quantité $\sqrt{k}\,\Theta(0)$ est égale à $H'(0)$, comme il résulte de ce que la limite de $\frac{\operatorname{sn} u}{u}$ est 1 pour $u = 0$: on a donc

$$N = \frac{in}{\mu\sqrt{D}} \frac{H'(0)}{\Theta(v)},$$

le signe étant arbitraire, à cause de la présence de ν; en définitive, l'herpolhodie est donc définie par l'équation

$$\rho e^{i\chi} = \frac{in}{\mu\sqrt{D}} \frac{H'(0)}{\Theta(v)} \frac{H(\tau - v)}{\Theta(\tau)} e^{\tau\left[\frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right] + i\nu}.$$

En se reportant aux valeurs de $\operatorname{sn}^2 v$, $\operatorname{cn}^2 v$, $\operatorname{dn}^2 v$ en fonction des données, on voit que l'on a

$$1 < \operatorname{sn}^2 v < \frac{1}{k^2}.$$

D'après cela, $v - K$ est purement imaginaire. Cette remarque nous conduit à poser

$$v - K = a,$$

et à remplacer v par cette valeur dans l'équation de l'herpolhodie.

Cette équation devient

$$\rho\, e^{i\chi} = -\frac{in}{\mu\sqrt{\mathrm{D}}}\,\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta_1(a)}\,\frac{\mathrm{H}_1(\tau-a)}{\Theta(\tau)}\,e^{i\lambda\tau+\nu}.$$

$$i\lambda = \frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta_1'(a)}{\Theta_1(a)}, \qquad \tau = n(t-t_0),$$

a est purement imaginaire et λ est réel; ν est une constante arbitraire réelle.

134. Vitesses de rotation autour des axes fixes. — Un point m de l'herpolhodie et l'extrémité ω de la rotation instantanée sont en ligne droite avec le point fixe O et l'on a vu qu'on a

$$\omega = \mathrm{O}m\sqrt{h}, \qquad \text{où} \qquad \sqrt{h} = \mu\sqrt{\mathrm{D}}.$$

Si donc, on appelle p_1 et q_1 les projections de la vitesse angulaire sur les axes fixes $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$, on aura

$$p_1 + iq_1 = \mu\sqrt{\mathrm{D}}\,\rho\, e^{i\chi}$$

ou bien

$$p_1 + iq_1 = -in\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta_1(a)}\,\frac{\mathrm{H}_1(\tau-a)}{\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)}.$$

C'est à un changement de notation près la formule donnée par Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 35; *Œuvres*, t. III, p. 302). L'argument ω qui figure dans la formule de Hermite et l'argument a employé ici sont liés par la relation

$$a = \omega + i\mathrm{K}'.$$

135. Les neuf cosinus déduits de l'équation de l'herpolhodie. — Comme on l'a déjà remarqué (n° **132**, p. 215), $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ sont les projections du segment $\mathrm{O}\sigma = l = \mathrm{D}\mu$ sur les axes mobiles. On a donc

$$\frac{\mathrm{A}p}{\gamma} = \frac{\mathrm{B}q}{\gamma'} = \frac{\mathrm{C}r}{\gamma''} = \mathrm{D}\mu,$$

d'où

$$\gamma = \mathrm{P}\,\mathrm{cn}\,\tau, \qquad \mathrm{P} = \mp\sqrt{\frac{\mathrm{A}(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{D}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}},$$

$$\gamma' = \mathrm{Q}\,\mathrm{sn}\,\tau, \qquad \mathrm{Q} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{B}(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{D}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}},$$

$$\gamma'' = \mathrm{R}\,\mathrm{dn}\,\tau, \qquad \mathrm{R} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{D})}{\mathrm{D}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}}.$$

Nous allons d'abord exprimer P, Q et R en fonction de l'argument v qui figure dans l'équation de l'herpolhodie. On a

$$Q^2 = \frac{B(A-D)}{D(A-B)}\frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)} = k^2 \operatorname{sn}^2 v;$$

puis l'identité

$$P^2 \operatorname{cn}^2\tau + Q^2 \operatorname{sn}^2\tau + R^2 \operatorname{dn}^2\tau = 1,$$

où l'on fait successivement $\operatorname{cn}^2\tau = 0$ et $\operatorname{dn}^2\tau = 0$, fait connaître R et P; on trouve ainsi

$$\gamma = -\frac{ik}{k'}\operatorname{cn} v \operatorname{cn}\tau, \qquad \gamma' = k \operatorname{sn} v \operatorname{sn}\tau, \qquad \gamma'' = -\frac{\operatorname{dn} v}{k'}\operatorname{dn}\tau,$$

ou bien

$$\gamma = -i\frac{H_1(v)H_1(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma' = \frac{H(v)H(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma'' = -\frac{\Theta_1(v)\Theta_1(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)},$$

et, en posant

$$v - K = a,$$

de sorte que (n° 133) a est purement imaginaire,

$$\gamma = i\frac{H(a)H_1(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma' = \frac{H_1(a)H(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma'' = -\frac{\Theta(a)\Theta_1(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}.$$

Pour calculer les autres cosinus nous prendrons comme inconnues

$$\alpha + i\beta, \qquad \alpha' + i\beta', \qquad \alpha'' + i\beta''.$$

Entre ces inconnues, on a les équations linéaires

$$\begin{gathered}
(\alpha+i\beta)\gamma + (\alpha'+i\beta')\gamma' + (\alpha''+i\beta'')\gamma'' = 0,\\
\gamma'(\alpha''+i\beta'') - \gamma''(\alpha'+i\beta') = -i(\alpha+i\beta),\\
(\alpha+i\beta)p + (\alpha'+i\beta')q + (\alpha''+i\beta'')r = p_1 + iq_1;
\end{gathered}$$

des deux premières, on déduit

$$\alpha' + i\beta' = (\alpha+i\beta)\frac{\gamma\gamma' - i\gamma''}{\gamma^2 - 1},$$

$$\alpha'' + i\beta'' = (\alpha+i\beta)\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{\gamma^2 - 1}$$

et, en portant ces valeurs dans la dernière équation,

$$(\alpha+i\beta)\left(p + q\frac{\gamma\gamma' - i\gamma''}{\gamma^2-1} + r\frac{\gamma\gamma''+i\gamma'}{\gamma^2-1}\right) = p_1 + iq_1.$$

Si l'on tient compte des égalités

$$Ap = l\gamma, \qquad Bq = l\gamma', \qquad Cr = l\gamma'',$$

$$\gamma p + \gamma' q + \gamma'' r = \mu = \frac{l}{D},$$

on peut écrire cette équation

$$(\alpha + i\beta)\left[\frac{\gamma l\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) + i\gamma'\gamma'' l\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)}{\gamma^2 - 1}\right] = p_1 + iq_1.$$

Il reste à exprimer en fonction de a les quantités

$$l\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right), \quad l\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right),$$

on peut le faire en se servant des relations suivantes :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)} = \frac{n}{l},$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{D} - \frac{1}{A}}}{\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{1}{B}}} = -\frac{QR}{P} = +i\frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v}$$

$$= +i\frac{H(v)\Theta_1(v)}{H_1(v)\Theta(v)} = -i\frac{H_1(a)\Theta(a)}{H(a)\Theta_1(a)};$$

on a ainsi

$$l\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) = -in\frac{H_1(a)\Theta(a)}{H(a)\Theta_1(a)},$$

$$l\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) = in\frac{H(a)\Theta_1(a)}{H_1(a)\Theta(a)},$$

$$\frac{\gamma l\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) + i\gamma'\gamma'' l\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)}{\gamma^2 - 1}$$

$$= -n\frac{H_1(a)\Theta(a)H_1(\tau)\Theta(\tau) + H(a)\Theta_1(a)H(\tau)\Theta_1(\tau)}{\Theta_1^2(a)\Theta^2(\tau) + H^2(a)H_1^2(\tau)}.$$

Si l'on divise les deux termes de cette fraction par $\Theta^2(a)\Theta^2(\tau)$ et si l'on y introduit les fonctions sn, cn, dn, elle devient, à un facteur constant près, égale à $\operatorname{cn}(\tau - a)$: sa valeur exacte est

$$-n\frac{\Theta(0)H_1(0)H_1(\tau - a)}{\Theta_1^2(0)\Theta(\tau - a)},$$

et l'égalité qui définit $\alpha + i\beta$ peut s'écrire

$$-n(\alpha+i\beta)\frac{\Theta(o)\,H_1(o)\,H_1(\tau-a)}{\Theta_1^2(o)\,\Theta(\tau-a)} = p_1 + iq_1 = -in\frac{H'(o)}{\Theta_1(a)}\,\frac{H_1(\tau-a)}{\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)}.$$

En supprimant les facteurs communs, et remarquant que $\frac{H'(o)}{\Theta(o)}$ et $\frac{H_1(o)}{\Theta_1(o)}$ sont deux quantités égales à $\sqrt{k}$, on a enfin

$$\alpha + i\beta = i\,\frac{\Theta_1(o)\,\Theta(\tau-a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},$$

et l'on en déduit $\alpha' + i\beta'$, $\alpha'' + i\beta''$.

Réunissons les valeurs des neuf cosinus :

$$\begin{aligned}
\gamma &= i\,\frac{H(a)\,H_1(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, & \alpha + i\beta &= i\,\frac{\Theta_1(o)\,\Theta(\tau-a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},\\
\gamma' &= \frac{H_1(a)\,H(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, & \alpha' + i\beta' &= \frac{\Theta(o)\,\Theta_1(\tau-a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},\\
\gamma'' &= -\frac{\Theta(a)\,\Theta_1(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, & \alpha'' + i\beta'' &= \frac{H_1(o)\,H(\tau-a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)}.
\end{aligned}$$

IV. — Polygones de Poncelet.

136. Remarques générales. — Les théorèmes de Géométrie que Poncelet a découverts (*Traité des propriétés projectives des figures*, 2e éd. t. I, p. 280; *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, p. 308; t. II, p. 1) sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique, se rattachent étroitement à la théorie des fonctions elliptiques, comme l'a montré Jacobi ([1]) (*Journ. de Crelle*, t. 3; *Gesamm. Werke*, t. 1, p. 279). Ces théorèmes sont projectifs : ils s'appliquent à des polygones réels et à des polygones imaginaires. On sait que, par une transformation projective, on peut toujours transformer deux coniques en deux cercles. Dans l'exposé suivant, nous supposerons, avec Jacobi, qu'il s'agit de deux cercles, et nous nous occuperons uniquement de polygones *réels*. Nous verrons que le cas où les cercles sont extérieurs se distingue entièrement des autres cas.

137. Théorème de Géométrie préliminaire. — Rappelons d'abord un théorème élémentaire. Soient (*fig.* 21) deux cercles

---

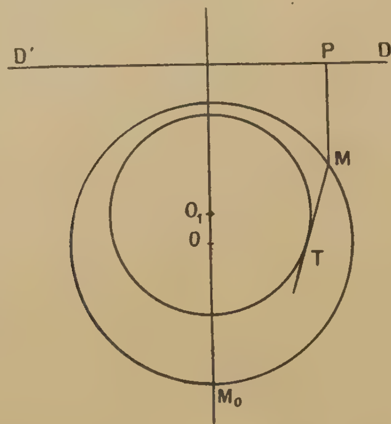
([1]) *Voir* également Moutard, *Applications*... de Poncelet, t. I, p. 535.

de centres O et O_1, placés d'une façon quelconque l'un par rapport à l'autre, et DD′ leur axe radical. D'un point M du cercle O extérieur à O_1, menons la tangente MT au cercle O_1 et la perpendiculaire MP sur D : on a

$$MT^2 = 2.OO_1.MP,$$

où OO_1 est une constante égale à la distance des centres.

Fig. 21.



Nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette relation qui est l'interprétation géométrique des équations des deux cercles et de leur axe radical.

138. **Premier cas de figure. Introduction des fonctions elliptiques.** — Supposons O_1 intérieur à O. Soient MTM_1 une corde du cercle O tangente à O_1, MP et M_1P_1 les distances des deux points M et M_1 à l'axe radical D supposé horizontal. Si le point M se déplace infiniment peu de $MM' = ds$, le point M_1 se déplace *dans le même sens* de $M_1M'_1 = ds_1$: les deux éléments d'arc ds et ds_1 ont donc le même signe. Les deux triangles semblables MTM′ et $M_1TM'_1$ donnent

$$\frac{MM'}{MT} = \frac{M_1M'_1}{M_1T};$$

mais, d'après le théorème préliminaire, on a

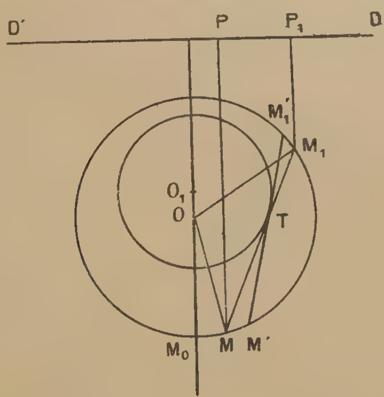
$$\frac{MT}{M_1T} = \frac{\sqrt{MP}}{\sqrt{M_1P_1}},$$

donc on a la relation

(1) $$\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{MP}}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\mathrm{M_1 P_1}}}.$$

Introduisons maintenant les intégrales, puis les fonctions elliptiques. Soient θ l'angle au centre $\mathrm{M_0OM}$, compté positivement

Fig. 22.



vers la droite, à partir du rayon vertical descendant $\mathrm{OM_0}$, et θ_1 l'angle $\mathrm{M_0OM_1}$: appelons a la distance de O à D et l le rayon : on a évidemment

$$\mathrm{MP} = l\cos\theta + a, \qquad \mathrm{M_1P_1} = l\cos\theta_1 + a,$$
$$ds = l\,d\theta, \qquad ds_1 = l\,d\theta_1,$$

d'où en portant dans (1)

(2) $$\frac{d\theta}{\sqrt{a + l\cos\theta}} = \frac{d\theta_1}{\sqrt{a + l\cos\theta_1}}.$$

Les deux différentielles elliptiques qui figurent dans cette relation se ramènent à la forme normale de Legendre par le changement

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \cos\theta_1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta_1}{2}.$$

On a alors en posant

$$k^2 = \frac{2l}{a+l},$$

$$\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{d\frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}}.$$

Le module k est réel et inférieur à 1, car $a > l$.

Introduisons une nouvelle variable φ en posant

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \varphi,$$

où φ est suivi par continuité quand θ partant de o varie d'une manière continue. On a alors, en faisant l'inversion

$$\sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\varphi, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{cn}\varphi,$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{\text{MP}}{a+l}} = \operatorname{dn}\varphi.$$

Si l'on reste dans le domaine réel, à chaque point M répondent une infinité de valeurs de θ différant de multiples de 2π et, par suite, une infinité de valeurs de φ différant de multiples de 2K si l'on désigne par K l'intégrale complète

$$\text{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

car si θ augmente de 2π, $\frac{\theta}{2} = \psi$ augmente de π.

Si nous appelons de même φ_1 une valeur de φ correspondant au point M_1, l'équation (2) donne en intégrant

$$\varphi_1 - \varphi = \text{L}, \tag{3}$$

où L désigne une constante; on a alors

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{sn}(\varphi+\text{L}), \qquad \cos\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{cn}(\varphi+\text{L}),$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta_1}{2}} = \sqrt{\frac{\text{M}_1\text{P}_1}{a+l}} = \operatorname{dn}(\varphi+\text{L}).$$

Cela posé, partons d'un point M correspondant à une valeur φ; la tangente MM_1 au cercle O_1 aboutit sur le cercle O à un point M_1 correspondant à

$$\varphi_1 \equiv \varphi + \text{L},$$

le signe $\equiv$ signifiant une égalité à des multiples de 2K près.

Menons ensuite la tangente $M_1 M_2$ qui aboutit au point M_2 correspondant à une valeur φ_2, nous aurons

$$\varphi_2 = \varphi_1 + L = \varphi + 2L, \quad \ldots,$$

et ainsi de suite. Après avoir mené n tangentes consécutives nous aurons le point M_n correspondant à

$$\varphi_n = \varphi + nL.$$

139. **Condition de fermeture.** — Pour que le polygone $MM_1, \ldots, M_n$ soit fermé, il faut et il suffit qu'un mobile parcourant les arcs successifs MM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}, M_n parcoure un nombre entier q de fois la circonférence. Donc il faut et il suffit que

$$\varphi_n = \varphi + q.2K,$$

c'est-à-dire que

$$nL = 2qK, \tag{4}$$

relation indépendante de φ. Si l'on peut trouver un nombre n vérifiant cette relation, c'est-à-dire si le rapport $\frac{L}{2K}$ est rationnel et égal à une fraction irréductible

$$\frac{q}{n},$$

on voit, qu'en partant d'un point quelconque M, on revient à ce point après avoir tracé exactement n tangentes consécutives et parcouru q fois exactement la circonférence O. On a ainsi un polygone de n côtés inscrit dans O et circonscrit à O_1 : on voit que ce polygone P_n^q est caractérisé par les deux nombres n et q; s'il en existe *un*, il en existe une infinité, puisque M est arbitraire. On peut remarquer que les deux déterminations de L

$$L = \frac{q}{n} 2K, \qquad L' = \frac{q + \lambda n}{n} 2K,$$

où λ est entier, sont équivalentes et donnent les mêmes polygones; on peut donc supposer $q < n$; de même les deux déterminations

$$L = \frac{q}{n} 2K, \qquad L_1 = \frac{n-q}{n} 2K$$

donnent les mêmes polygones : car, si en allant de M en M_1 dans un sens, on a

$$\varphi - \varphi_1 = L;$$

en allant de M en M_1 en sens contraire, on a

$$\varphi - \varphi_1 = 2K - L = L_1.$$

On peut donc, comme dans la théorie des polygones réguliers convexes ou étoilés, supposer q premier avec n et inférieur à $\frac{n}{2}$.

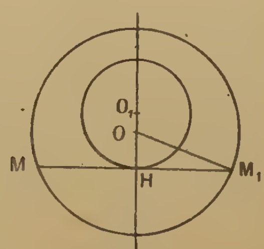
Lorsque $q = 1$, le polygone est convexe ; il est étoilé si $q > 1$.

Pour que les polygones P_n^q existent, il faut et il suffit qu'il existe une certaine relation algébrique entre les rayons l et l_1 de deux circonférences et la distance $OO_1 = c$ de leurs centres. Pour former cette relation, supposons le cercle O et l'axe radical D choisis arbitrairement de manière que $a > l$: il faut ensuite déterminer le cercle O_1 de façon que

$$L = \frac{q}{n} 2K.$$

Comme on peut déformer le polynome P_n^q d'une manière continue, de façon que ses sommets décrivent O et que ses côtés

Fig. 23.



enveloppent O_1, nous pouvons supposer qu'il existe un côté horizontal MM_1 (*fig.* 23) tangent au point le plus bas H du cercle O_1 ; pour ce côté, on peut prendre $\theta_1 = -\theta$, $\varphi_1 = -\varphi$, et comme

$$\varphi_1 - \varphi = L, \qquad \varphi_1 = \frac{L}{2}.$$

Alors

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{sn}\frac{L}{2}, \qquad \cos\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{cn}\frac{L}{2}.$$

En projetant le contour O_1OM_1 sur la verticale O_1H, on a

$$\cos\theta_1 = \frac{l_1 - c}{l},$$

c étant la distance OO_1. On a donc

$$2\,\mathrm{cn}^2\frac{L}{2} - 1 = \frac{l_1 - c}{l},$$

le module étant $k^2 = \dfrac{2l}{a+l}$ avec

$$a = \frac{l^2 - l_1^2 + c^2}{2c}.$$

Pour exprimer que le polygone P_n^q existe, il faudra écrire la condition nécessaire et suffisante

$$2\,\mathrm{cn}^2\frac{qK}{n} - 1 = \frac{l_1 - c}{l} \tag{5}$$

qui donne une relation entre l, l_1 et c.

En s'appuyant sur la formule (10) (n° 92), le lecteur démontrera aisément qu'il existe une relation algébrique entre $\mathrm{cn}\,nu$, $\mathrm{cn}\,u$ et k^2. Faisons $u = \dfrac{qK}{n}$; on en déduit qu'il existe une relation algébrique entre $\dfrac{l_1-c}{l}$, k^2 et $\mathrm{cn}\,qK$; or $\mathrm{cn}^2 qK = 0$ ou 1 suivant la parité de q; $\dfrac{l_1-c}{l}$ et k^2 satisfont donc à une équation algébrique, comme nous l'avions annoncé.

Par exemple, pour qu'il existe un triangle inscrit à O et circonscrit à O_1, il faut et il suffit que

$$2\,\mathrm{cn}^2\frac{K}{3} - 1 = \frac{l_1 - c}{l}.$$

Nous avons donné (*fig.* 24) le cas du triangle et celui du pentagone étoilé.

Si a augmente indéfiniment, les cercles deviennent concentriques, $k = 0$, et les polygones, quand ils existent, sont réguliers.

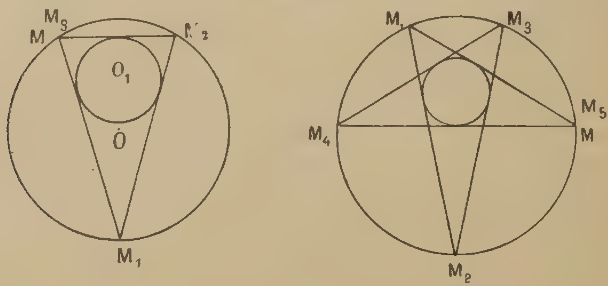
Interprétation par le mouvement d'un pendule simple. — Supposons que le cercle O soit décrit par un pendule simple qui aurait, à chaque instant, la vitesse v due à la chute d'une hau-

teur MP; on aura donc

$$v^2 = 2g.\mathrm{MP},$$

MP étant la distance de M à l'axe radical DD′ (cas du mouvement révolutif, n° 129, 2°; *voir* aussi *Traité de Mécanique rationnelle*,

Fig. 24.



par P. Appell, 2e éd., t. I, n° 248). Si de M on mène la tangente $\mathrm{MM_1}$ au cercle $\mathrm{O_1}$, le point $\mathrm{M_1}$ est entraîné, dans le même sens, par le mouvement de M; appelons v_1 sa vitesse; d'après (1) on a

$$\frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{M_1 P_1}}{\mathrm{MP}}},$$

d'où

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \frac{\mathrm{M_1 P_1}}{\mathrm{MP}}, \qquad v_1^2 = 2g.\mathrm{M_1 P_1}.$$

Le point $\mathrm{M_1}$ se meut donc comme un second pendule, placé dans les mêmes conditions initiales, mais parti en avance sur le premier d'un certain temps τ. On peut dire aussi que M est la position d'un pendule au temps t et $\mathrm{M_1}$ la position *du même pendule* au temps

$$t_1 = t + \tau,$$

où τ est une *constante*. Comme vérification, en introduisant la variable précédente φ, on a, en posant

$$\lambda = \frac{\sqrt{2g(a+l)}}{2l},$$

$$\lambda t = \varphi, \qquad \lambda t_1 = \varphi_1, \qquad \lambda\tau = \mathrm{L}.$$

Le polygone $\mathrm{MM_1 \ldots M}_n$, obtenu en menant les tangentes successives $\mathrm{MM_1}$, $\mathrm{M_1M_2}$, ..., $\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n$, a pour sommets les posi-

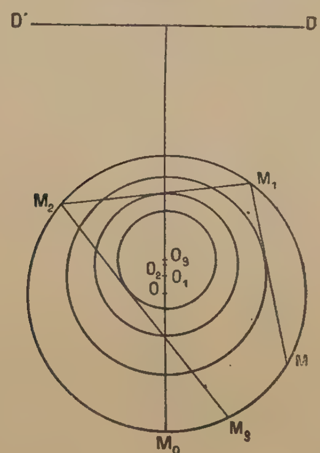
tions successives du même pendule aux instants

$$t, \quad t+\tau, \quad t+2\tau, \quad \ldots, \quad t+n\tau.$$

Si donc τ est *commensurable* avec la durée T d'une révolution complète, le polygone se ferme quel que soit le point de départ M; c'est le théorème de Poncelet.

140. Généralisation de Jacobi. — Soient plusieurs cercles O_1, O_2, ..., intérieurs à O, ayant, avec O et entre eux, le même axe radical DD'. On peut mener la tangente MM_1 au cercle O_1,

Fig. 25.



puis M_1M_2 à O_2, puis M_2M_3 à O_3, et ainsi de suite, les points M, M_1, M_2, ..., M_n étant tous sur O. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi &= L_1,\\
\varphi_2 - \varphi &= L_2,\\
\ldots&\ldots\ldots,\\
\varphi_n - \varphi &= L_n.
\end{aligned}$$

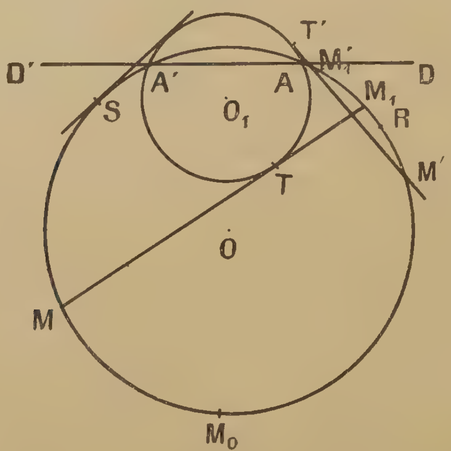
Si donc $L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ est commensurable avec $2K$, le polygone $MM_1 \ldots M_n$ se ferme quel que soit le point de départ.

On peut imaginer que M, M_1, ..., M_n sont les positions successives d'un même pendule aux instants t, $t+\tau_1$, $t+\tau_2$, ...,

$t + \tau_n$. Si $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ est commensurable avec la durée de révolution T, le polygone se ferme quel que soit M.

141. **Deuxième cas : les cercles se coupent.** — Supposons (*fig.* 26) que le cercle O_1 coupe O en deux points A et A′ correspondant à l'angle α de OA avec la verticale descendante OM_0. L'axe radical DD′ est AA′, supposé horizontal; la partie utile du cercle O est, sur la figure, la partie inférieure $A'M_0A$. Actuelle-

Fig. 26.



ment $a < l$; si l'on appelle, comme plus haut, θ et θ_1 les angles au centre correspondant aux deux points M et M_1 où une tangente à O_1 coupe O, le point de contact T de MM_1 avec O_1 peut être placé soit entre M et M_1, soit à l'extérieur de MM_1.

Dans la première définition (tangente MM_1) on a

$$(6) \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{a + l\cos\theta}} = \frac{d\theta_1}{\sqrt{a + l\cos\theta_1}},$$

car $d\theta$ et $d\theta_1$ sont de mêmes signes; dans la deuxième définition (*fig.* 26)

$$(7) \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{a + l\cos\theta}} = \frac{d\theta_1}{-\sqrt{a + l\cos\theta_1}},$$

car $d\theta$ et $d\theta_1$ sont de signes contraires. Pour donner à la diffé-

rentielle elliptique la forme normale, on opère comme dans la théorie du pendule simple (n° 129) : on fait

$$a = -l\cos\alpha, \qquad \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Alors les relations (6) et (7) deviennent

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{du_1}{\pm\sqrt{(1-u_1^2)(1-k^2u_1^2)}}, \qquad k = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Posons

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \varphi,$$

$$u = \operatorname{sn}\varphi, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = k\operatorname{sn}\varphi, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}\varphi.$$

A chaque valeur de φ correspond un point du cercle. A chaque point du cercle correspondent des valeurs réelles de φ déterminées sans ambiguïté, car si l'on change θ en $\theta + 2\pi$, φ augmente de $2K + 2iK'$.

Si la tangente MM_1 est du premier type, on a

$$d\varphi_1 = d\varphi, \qquad \varphi_1 = \varphi + L$$

comme précédemment. Supposons que M marche dans le sens positif, u et φ suivis par continuité croissent, u_1 et φ_1 aussi ; à un certain moment M_1 vient en A, $u_1 = 1$, $\varphi_1 = K$ et le second radical s'annule. Si u et φ continuent à croître, u_1 diminue, mais φ_1 continue à croître, car

$$\varphi_1 = \int_0^1 \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k^2u_1^2)}} + \int_1^{u_1} \frac{du_1}{-\sqrt{(1-u_1^2)(1-k^2u_1^2)}};$$

les points prennent la seconde disposition $M'M'_1T'$ (*fig.* 26) ; on a alors encore

$$d\varphi_1 = d\varphi, \qquad \varphi_1 = \varphi + L.$$

La relation $\varphi_1 = \varphi + L$, s'applique donc aux deux dispositions de la figure, et les conséquences sont les mêmes que plus haut. Si $\frac{L}{2K}$ est rationnel, il existe une infinité de polygones inscrits

dans O et circonscrits à O_1. Pour qu'il existe des polygones P''_n, il faut et il suffit que la relation (5) soit vérifiée, le carré du module k^2 étant égal actuellement à $\frac{l+a}{2l}$. Par exemple, pour $n=3$, on peut avoir un triangle auquel O est circonscrit et O_1 exinscrit.

Si l'on mène une tangente commune aux deux cercles, le point de contact R avec O est tel que $u_1 = u$; on a alors

$$\varphi_1 = 2K - \varphi,$$

d'où, comme $\varphi_1 = L + \varphi$,

$$\varphi = \frac{2K - L}{2}.$$

On obtient de même le point de contact symétrique S.

142. Interprétation par un pendule simple. — On peut imaginer que M est un pendule simple oscillant sur O et partant de A sans vitesse; on voit alors que M_1 peut être regardé comme une position du même pendule qui est en M à l'instant t et en M_1 à l'instant $t+\tau$ (τ constant). Les points successifs $M, M_1, \ldots, M_n$ sont les positions du même pendule aux instants

$$t, \quad t+\tau, \quad t+2\tau, \quad \ldots, \quad t+n\tau.$$

Si τ est commensurable avec la période T d'une oscillation, il existe un entier n tel que M_n se confonde avec M. Quand t varie, tous les points se meuvent, le polygone $MM_1\ldots M_{n-1}M$ se déplace et se déforme de façon que ses sommets décrivent O et que ses côtés enveloppent O_1. Dans le cas actuel, on a

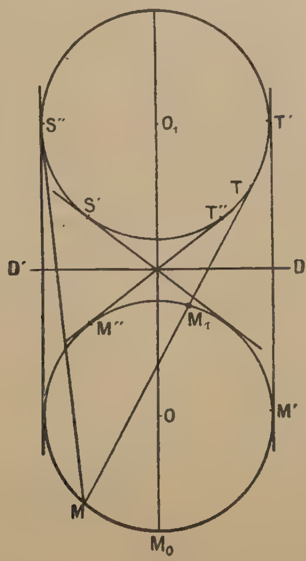
$$\varphi = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad L = \tau\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

143. Troisième cas : le cercle O_1 est extérieur à O. — Les tangentes menées des points M du cercle O au cercle O_1 se divisent en deux familles distinctes, suivant que leur point de contact T avec O_1 est sur l'arc de droite T′T″ ou sur l'arc de gauche S′S″ symétrique du premier par rapport à OO_1; les premières s'appellent tangentes de la première catégorie, les autres de la seconde catégorie. En restant dans le domaine réel, on ne peut pas passer par continuité d'une tangente d'une catégorie à une autre tangente

de l'autre; de chaque point M de O on peut mener à O_1 deux tangentes, une de chaque catégorie.

Tangentes de la première catégorie. — Appelons, comme dans le premier cas, l le rayon de O, a la distance du centre O à

Fig. 27.



l'axe radical DD'; soient θ et θ_1 les angles au centre O des rayons OM et OM_1 aboutissant aux deux points où la tangente coupe la circonférence O. On a

$$\frac{d\theta}{\sqrt{a+l\cos\theta}} = \frac{d\theta_1}{-\sqrt{a+l\cos\theta_1}},$$

car $d\theta$ et $d\theta_1$ sont constamment de signes contraires. Posant, comme dans le premier cas,

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad k^2 = \frac{2l}{a+l},$$

on a

$$\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{d\frac{\theta_1}{2}}{-\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}}.$$

Faisons encore

$$\int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \varphi,$$

on a actuellement

$$\sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\varphi, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{cn}\varphi,$$

$$d\varphi = -d\varphi_1,$$

$$\varphi + \varphi_1 = \mathrm{L},$$

L désignant une constante, et la dernière égalité ayant lieu à des multiples de $2\mathrm{K}$ près, si l'on se borne aux valeurs réelles. En particulier, pour les points de contact M' et M'' des tangentes communes, on a

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{\mathrm{L}}{2},$$

ou

$$\varphi_1 = 2\mathrm{K} + \varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{\mathrm{L}}{2} - \mathrm{K}.$$

Tangentes de la deuxième catégorie. — Comme les tangentes de la deuxième catégorie sont symétriques des premières par rapport à OO_1 et que deux points symétriques s'obtiennent en donnant à φ deux valeurs opposées, on a pour les deux points M, M_1 où une de ces tangentes coupe O

$$\varphi + \varphi_1 = -\mathrm{L}.$$

Ceci posé, partons d'un point M : la tangente de première catégorie partant de M coupe O en un point M_1 tel que

$$\varphi_1 = \mathrm{L} - \varphi.$$

De M_1 part une tangente de seconde catégorie $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ qui donne

$$\varphi_2 + \varphi_1 = -\mathrm{L};$$

De M_2 part une tangente de la première $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ qui donne

$$\varphi_3 + \varphi_2 = \mathrm{L}$$

et ainsi de suite. Si l'on revient ainsi au point de départ M, on ne peut y revenir par une tangente distincte de MM_1 que si la der-

nière tangente $M_{n-1}M_n$ (M_n confondu avec M) est de la seconde catégorie, ce qui exige n *pair* $= 2p$. On voit donc *a priori* qu'il ne peut exister que des polygones d'un *nombre pair* de cotés inscrits à O et circonscrits à O_1. On a successivement

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= L - \varphi,\\
\varphi_2 &= -2L + \varphi,\\
\varphi_3 &= 3L - \varphi,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
\varphi_{2p} &= -2pL + \varphi.
\end{aligned}$$

Pour que le dernier point se confonde avec M, il faut et il suffit que

$$-2pL + \varphi = \varphi + 2qK,$$

d'où, comme φ disparaît,

$$-\frac{L}{K} = \frac{q}{p} \quad \text{(irréductible)};$$

il faut et il suffit que les deux cercles soient placés de façon que $\frac{L}{K}$ soit rationnel : alors le point M étant arbitraire, le polygone se ferme toujours au bout de $2p$ opérations.

Dans ce cas, pour obtenir la condition de fermeture, on peut employer une méthode qui, d'ailleurs, s'applique aussi aux deux autres cas. On peut supposer un sommet au point le plus bas M_0 (*fig.* 28). Soient $M_0M_1T_1$ la tangente, δ sa distance OQ au point O ; soit

$$O_1O = c.$$

Alors en appelant θ_0 et θ_1 les angles au centre pour M_0 et M_1, on a

$$\theta_0 = 0, \qquad \varphi_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = L - \varphi_0 = L.$$

Or

$$\frac{\delta}{l_1} = \frac{l}{c+l},$$

et le triangle M_0OQ donne $\delta = l\cos\frac{\theta_1}{2}$.

On a de plus

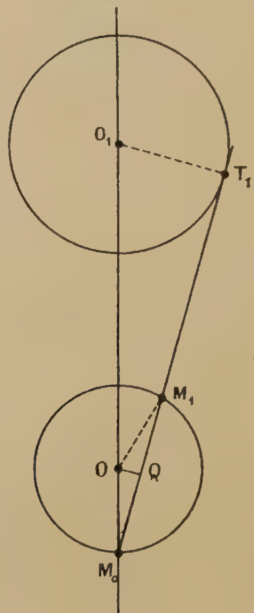
$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{cn}\varphi;$$

donc

$$\operatorname{cn} L = \frac{\delta}{l} = \frac{l_1}{c+l}.$$

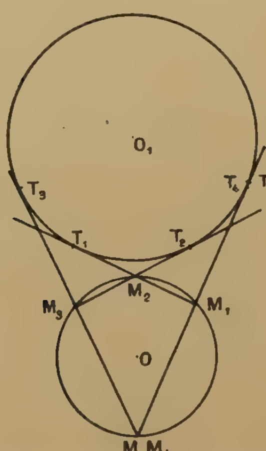
Telle est la condition, L ayant une certaine valeur commensurable avec K.

Fig. 28.



C'est un fait remarquable qu'ici il n'existe de polygones de

Fig. 29.



Poncelet réels que d'un nombre pair de côtés. Ainsi il ne peut

pas y avoir de triangle; car le cercle circonscrit et un cercle exinscrit se coupent *toujours;* le premier polygone possible est un quadrilatère comme le montre la figure 29.

Remarque. — Si l'on voulait analytiquement trouver un polygone $2p-1$ côtés, on aurait à écrire

$$\varphi_{2p-1} = \varphi.$$

c'est-à-dire

$$(2p-1)\mathrm{L} \qquad \varphi = \varphi - 2q\mathrm{K},$$

d'où

$$2\varphi = (2p-1)\mathrm{L} + 2q\mathrm{K}.$$

On aurait alors des points de départ spéciaux. Mais il est aisé de voir que les polygones ainsi obtenus sont repliés sur eux-mêmes, en ce sens qu'en partant de M on trouve pour sommet M_{p-1} un point de contact des tangentes communes; M_p se confond alors avec M_{p-1}, M_{p+1} avec M_{p-2}, ..., M_{2p-1} avec M.

Interprétation par le mouvement d'un pendule. — L'interprétation par le pendule est actuellement moins simple. Nous la proposerons comme exercice. Il faudrait considérer deux pendules tournant en sens inverse sur le cercle et passant au point le plus haut, à des instants différents, avec des vitesses opposées.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V.

1. *Rectification de l'ellipse.* — On peut représenter les coordonnées d'un point d'une ellipse par les formules

$$x = a \operatorname{sn} u, \qquad y = b \operatorname{cn} u,$$

et si l'on prend pour module l'excentricité, on trouve que l'arc, compté à partir du point le plus haut, a pour expression (*cf.* n° 102)

$$s = a\int_0^u (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)\, du = a\left[u - u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right].$$

L'origine du nom de *fonctions elliptiques* est liée à ce problème.

2. Lignes géodésiques du *caténoïde* (surface engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base).

[L'axe de révolution étant pris pour axe Oz et r désignant le rayon d'un parallèle, on a, pour l'équation de la surface,

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

On trouve que la projection des lignes géodésiques sur le plan des xy a pour équation en coordonnées polaires

$$\theta = \int_r^\infty \frac{b\, dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}},$$

b désignant une constante arbitraire et l'angle θ étant compté à partir de la direction asymptotique.

1° Soit $b > a$. En posant

$$\frac{b}{r} = u,$$

on a

$$\theta = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad k = \frac{a}{b}.$$

Donc

$$u = \operatorname{sn}\theta, \qquad r = \frac{b}{\operatorname{sn}\theta}.$$

Telle est l'équation de la courbe.

2° Soit $b > a$. En posant

$$\frac{a}{r} = v,$$

on a.

$$\theta = k\int_0^{v} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}, \qquad k = \frac{b}{a}.$$

Donc

$$v = \operatorname{sn}\frac{\theta}{k}, \qquad r = \frac{a}{\operatorname{sn}\frac{\theta}{k}}.$$

3° Si $b = a$, on est dans un cas de dégénérescence, $k = 1$:

$$r = a \coth\theta\ (^1).]$$

3. Montrer que les courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. qui ont été employées dans l'étude de la surface des ondes, constituent deux familles orthogonales.

4. Les neuf cosinus qui servent à définir la position relative de deux trièdres trirectangles peuvent s'exprimer en fonction de trois paramètres a, u, λ au moyen des formules suivantes :

$$\gamma = i\frac{H(a)H(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha + i\beta = -i\frac{\Theta_1(0)\Theta_1(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

$$\gamma' = \frac{H_1(a)H_1(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha' + i\beta' = \frac{\Theta(0)\Theta(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

$$\gamma'' = -\frac{\Theta(a)\Theta(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha'' + i\beta'' = \frac{H_1(0)H_1(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

dans lesquelles on suppose u et λ réels et a purement imaginaire ; de plus, les fonctions de Jacobi sont supposées construites avec un module réel.

[Il suffit de vérifier

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

$$(\alpha + i\beta)^2 + (\alpha' + i\beta')^2 + (\alpha'' + i\beta'')^2 = 0,$$

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \gamma'(\alpha' + i\beta') + \gamma''(\alpha'' + i\beta'') = 0,$$

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + (\alpha' + i\beta')(\alpha' - i\beta') + (\alpha'' + i\beta'')(\alpha'' - i\beta'') = 2.$$

Cela résulte des identités suivantes :

$$\Theta_1^2(a)\Theta_1^2(u) - H_1^2(a)H_1^2(u) = \Theta^2(a)\Theta^2(u) - H^2(a)H^2(u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$H_1(0)H_1(u-a)\Theta_1(a)\Theta_1(u) - \Theta_1(0)\Theta_1(u-a)H_1(a)H_1(u)$$
$$= \Theta(0)\Theta(u-a)H(a)H(u),$$

$$\Theta_1^2(0)\,\Theta_1(u-a)\,\Theta_1(u+a) = \Theta^2(a)\,\Theta^2(u) + H_1^2(a)H_1^2(u),$$

$$\Theta^2(0)\,\Theta(u-a)\,\Theta(u+a) = \Theta_1^2(a)\Theta_1^2(u) - H_1^2(a)H_1^2(u),$$

$$H_1^2(0)H_1(u-a)H_1(u+a) = \Theta_1^2(a)\Theta_1^2(u) - \Theta^2(a)\,\Theta^2(u),$$

(1) Greenhill, *Fonctions elliptiques*, p. 138.

et d'une autre identité qui se déduit de la première de celles-ci en y remplaçant a par o et u par $u-a$.]

5. Vérifier que les valeurs précédentes des neuf cosinus satisfont aux relations

$$(\alpha'-i\beta')(\alpha''+i\beta'')=-\gamma'\gamma''+i\gamma,$$
$$(\alpha''-i\beta'')(\alpha+i\beta)=-\gamma''\gamma+i\gamma',$$
$$(\alpha-i\beta)(\alpha'+i\beta')=-\gamma\gamma'+i\gamma'',$$

équivalentes au système suivant :

$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, \qquad \gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha'',$$
$$\alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0, \qquad \gamma'=\alpha''\beta-\beta''\alpha,$$
$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0, \qquad \gamma''=\alpha\beta'-\beta\alpha'.$$

(D'après cela, les deux trièdres dont la position relative est définie à l'aide de ces cosinus ont même disposition.)

6. *Surfaces pseudo-sphériques de révolution.* — Les coordonnées cartésiennes r, z d'un point de la méridienne d'une de ces surfaces sont données par l'un des systèmes suivants (où λ et R désignent deux longueurs) :

$$r=e^{\frac{u}{R}}, \qquad z=\int\sqrt{1-\frac{1}{R^2}e^{\frac{2u}{R}}}\,du,$$
$$r=\lambda\,\text{sh}\frac{u}{R}, \qquad z=\int\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{R^2}\text{ch}^2\frac{u}{R}}\,du,$$
$$r=\lambda\,\text{ch}\frac{u}{R}, \qquad z=\int\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{R^2}\text{sh}^2\frac{u}{R}}\,du.$$

Dans le premier cas, on a une tractrice; dans le second, on pose $r=Rk\,\text{cn}\,\tau$, avec $\lambda=Rk'$; dans le troisième, on pose $r=\frac{R}{k}\text{dn}\,\tau$ avec $\lambda=\frac{Rk'}{k}$.

Discuter la forme de ces méridiennes (*voir* L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2e édition, t. 1, p. 225-228).

CHAPITRE VI.

FONCTION p A PÉRIODES IMAGINAIRES CONJUGUÉES; DISCRIMINANT NÉGATIF.

I. — Le discriminant est négatif. Valeurs réelles de pu et de $p'u$.

144. Objet de ce paragraphe. — Soient ω_2 et $\frac{\omega'_2}{i}$ deux quantités réelles, non nulles, que nous supposerons positives pour fixer les idées. Posons

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2;$$

le rapport $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$ ayant sa partie réelle non nulle (et positive), nous pourrons construire une fonction pu admettant $2\omega_1$ et $2\omega_3$ comme périodes primitives. Nous nous proposons de montrer que les invariants sont réels, que la valeur de la fonction est réelle quand l'argument est réel ou purement imaginaire et nous en déduirons que le discriminant $g_2^3 - 27 g_3^2$ est négatif.

145. Les invariants sont réels. — Les invariants sont donnés par les séries absolument convergentes

$$\frac{1}{60} g_2 = \sum{}' \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^4}, \qquad \frac{1}{140} g_3 = \sum{}' \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^6}.$$

Comme les quantités

$$2m\omega_1 + 2n\omega_3, \qquad 2m\omega_3 + 2n\omega_1$$

sont imaginaires conjuguées, on peut, dans chacune des séries précédentes, associer deux à deux les termes de façon que leur somme soit réelle. Donc les invariants g_2 et g_3 sont réels.

146. Arguments réels, purement imaginaires, imaginaires conjugués. — *Arguments réels.* — De même, dans la série absolu-

ment convergente

$$pu - \frac{1}{u^2} = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \\ \left. \begin{array}{l} m \\ n \end{array} \right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \\ w = 0 \text{ exclu}, \end{array} \right.$$

si l'on suppose u réel, on peut associer deux à deux les termes de façon que leur somme soit réelle. Donc, pour un argument réel, la valeur de la fonction pu est réelle.

On voit de même que la dérivée

$$p'u = -\frac{2}{u^3} - 2\sum{}' \frac{1}{(u-w)^3}$$

est réelle quand u est réel; or, dans le parallélogramme $(0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3)$, $p'u$ ne peut s'annuler que pour les valeurs ω_1, ω_2 et ω_3 de u (n° 46). Son seul zéro réel étant $u = \omega_2$, et son seul pôle, $u = 0$, elle garde un signe constant quand u varie de 0 à ω_2; et comme elle est négative pour u positif et très petit, elle est constamment négative quand u varie de 0 à ω_2; pu va constamment en décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $p\omega_2$.

Arguments purement imaginaires. — Pour voir si la fonction $p(iu)$ est réelle quand u est réel, remarquons que l'on change seulement le signe de la fonction pu quand on multiplie par i l'argument et les deux périodes. On a donc

$$p(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -p(u \mid i\omega_1, i\omega_3),$$

où

$$i\omega_1 = \frac{i\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2i}, \qquad i\omega_3 = \frac{i\omega_2}{2} - \frac{\omega_2'}{2i};$$

puis, comme on peut toujours changer le signe d'une période,

$$p(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -p(u \mid i\omega_1, -i\omega_3).$$

Pour la fonction du second membre, les deux périodes sont imaginaires conjuguées. Si donc u est réel on est ramené au cas déjà étudié.

En prenant les dérivées des deux membres de la relation que

nous venons d'obtenir, on trouve

$$i\wp'(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -\wp'(u \mid i\omega_1, -i\omega_3).$$

Les deux égalités précédentes montrent que si u est réel, $\wp(iu \mid \omega_1, \omega_3)$ est réelle et $\wp'(iu \mid \omega_1, \omega_3)$ purement imaginaire.

Ces égalités peuvent s'écrire, en mettant en évidence les invariants g_2 et g_3 au lieu des périodes ω_1 et ω_3 :

$$\wp(iu; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3),$$
$$i\wp'(iu; g_2, g_3) = -\wp'(u; g_2, -g_3);$$

ces formules [qui sont un cas particulier des formules (54), p. 47] résultent de ce que, si l'on remplace

$$\omega_1, \qquad \omega_3$$

par

$$i\omega_1, \qquad -i\omega_3,$$

dans les séries qui donnent g_2 et g_3, g_2 ne change pas et g_3 se reproduit multiplié par -1.

Arguments imaginaires conjugués. — A deux valeurs u et u_0 imaginaires conjuguées de l'argument correspondent, pour la fonction, deux valeurs imaginaires conjuguées. En effet, on a

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$
$$\wp u_0 = \frac{1}{u_0^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u_0-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Il s'agit de montrer que, si l'on change i en $-i$ dans l'expression de $\wp u_0$, cette expression se change en $\wp u$.

Si l'on change i en $-i$ dans la deuxième série on trouve, en désignant par w_0 la quantité imaginaire conjuguée de w,

$$\frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w_0)^2} - \frac{1}{w_0^2}\right];$$

il reste donc à vérifier que l'on a

$$\sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w_0)^2} - \frac{1}{w_0^2}\right]:$$

cela résulte de ce que la quantité imaginaire conjuguée de

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$$

est la quantité

$$w_0 = 2m\omega_3 + 2n\omega_1,$$

et que, dans chacune des sommes précédentes, m et n prennent toutes les valeurs entières ($w = 0$ exclu). On peut donc passer de la valeur de pu à la valeur de pu_0 en changeant i en $-i$; ces deux valeurs sont imaginaires conjuguées. C'est ce que nous voulions vérifier. On observera d'ailleurs que ce dernier résultat entraîne les précédents.

147. Parmi les racines e_1, e_2, e_3, l'une e_2 est réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Le discriminant est négatif. — Nous pouvons vérifier maintenant que les racines du polynome en pu

$$4p^3u - g_2pu - g_3$$

sont l'une réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Ce polynome étant égal à p'^2u, ses racines sont

$$e_1 = p\omega_1, \qquad e_3 = p\omega_3, \qquad e_2 = p(\omega_1 + \omega_3)$$

ou bien

$$e_2 = p\left(\frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_2'}{2}\right), \qquad e_3 = p\left(\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right), \qquad e_2 = p\omega_2.$$

On voit déjà que la dernière est réelle, puisque ω_2 est réel; la première racine peut s'obtenir en prenant la formule d'addition

$$p(u+v) = -pu - pv + \frac{p'^2u + p'^2v - 2p'up'v}{4(pu - pv)^2},$$

et en y faisant

$$u = \frac{\omega_2}{2}, \qquad v = -\frac{\omega_2'}{2};$$

pu et $p'u$ sont réelles; pv est réelle et $p'v$ purement imaginaire. Donc $e_1 = p\omega_1$ est imaginaire. La même formule montre que $e_3 = p\omega_3$ est la quantité imaginaire conjuguée de e_1 (ce qui devait être puisque ω_1 et ω_3 sont des quantités imaginaires conjuguées).

Puisque, sur les trois racines e_1, e_2, e_3, il y en a une réelle et deux imaginaires conjuguées, le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ est négatif (n° 46).

Distinction des racines imaginaires par le signe du coefficient de i. — Nous pouvons distinguer les deux racines imagi-

naires e_1, e_3, en considérant, dans chacune d'elles, le signe du coefficient de i.

La racine e_1 s'obtient en faisant $u = \frac{\omega_2}{2}$, $v = -\frac{\omega'_2}{2}$ dans la valeur précédente de $\wp(u+v)$; le coefficient de i dans le résultat a le signe de $-\frac{1}{i}\wp' u \wp' v$, et, comme $\wp' u$ est négative pour $u = \frac{\omega_2}{2}$, le signe à considérer est celui de

$$\frac{1}{i}\wp' v = \frac{1}{i}\wp'\left(-\frac{\omega'_2}{2}\right) = -\frac{1}{i}\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2}\right) = i\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2}\right);$$

comme l'argument $\frac{\omega'_2}{2}$ est purement imaginaire, servons-nous de la formule

$$i\wp'(iu; g_2, g_3) = -\wp'(u; g_2, -g_3);$$

nous trouverons

$$i\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2}; g_2, g_3\right) = -\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2i}; g_2, -g_3\right).$$

Or le signe du second membre est le signe $+$, puisque, quand u varie en restant réel de 0 à $\frac{\omega'_2}{i}$, $\wp'(u; g_2, -g_3)$ est constamment négative.

Donc, pour la racine e_1, le coefficient de i a le signe $+$; pour la racine e_3, le coefficient de i a le signe $-$.

Remarque. — On a, quel que soit u,

$$\wp(u+\omega_2) = \wp(u+\omega'_2).$$

En effet, la période $2\omega_1$ étant égale à $\omega_2 - \omega'_2$, on peut écrire

$$\wp(u+\omega'_2) = \wp(u+\omega'_2+2\omega_1) = \wp(u+\omega_2).$$

148. Valeurs de u pour lesquelles $\wp u$ et $\wp' u$ sont réelles toutes les deux. Résumé. — Nous avons vu que, quand u croît de zéro à ω_2, $\wp u$ et $\wp' u$ sont réelles toutes les deux : $\wp' u$ varie d'une manière continue de $-\infty$ à zéro, $\wp u$ décroît constamment de $+\infty$ jusqu'à $e_2 = \wp\omega_2$. Nous voulons maintenant définir toutes les valeurs de u qui rendent réelles $\wp u$ et $\wp' u$ simultanément. Considérons la relation

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3);$$

si $\wp u$ est réelle, le premier et le troisième facteur sont imaginaires

conjugués, leur produit est positif : pour que $p'u$ soit réelle il faut que l'on ait

$$pu > e_2.$$

Soit a une valeur réelle plus grande que e_2 ; il y a un argument réel v, compris entre o et ω_2, pour lequel on a

$$pu = a;$$

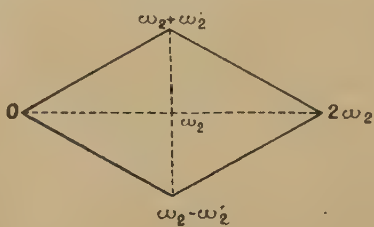
toutes les autres solutions de cette équation sont données par la formule

$$u = \pm v + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m et n étant des nombres entiers.

On conclut de là que, si un argument u rend réelles la fonction pu et sa dérivée $p'u$, on peut toujours, en ajoutant des périodes, le ramener à être réel et compris entre $-\omega_2$ et $+\omega_2$.

Fig. 30.



On peut résumer les résultats précédents dans le Tableau que voici :

u	o		ω_2		$2\omega_2$
pu	$+\infty$	décr.	e_2	cr.	$+\infty$
$p'u$	$-\infty$	$-$	o	$+$	$+\infty$
u	$\omega_2-\omega'_2$		ω_2		$\omega_2+\omega'_2$
pu	$-\infty$	cr.	e_2	décr.	$-\infty$
$ip'u$	$-\infty$	$+$	o	$-$	$-\infty$

On voit que sur les diagonales du *losange* des périodes (*fig.* 30) (o, $\omega_2-\omega'_2$, $2\omega_2$, $\omega_2+\omega'_2$) la fonction pu passe deux fois par toute valeur réelle ; partout ailleurs, dans l'intérieur du losange, la fonction pu est donc imaginaire.

II. — EXPRESSION DES PÉRIODES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA FORME NORMALE DE LEGENDRE, DANS LE CAS DU DISCRIMINANT NÉGATIF.

149. Expression des périodes en fonction des invariants. — Les périodes étant, comme plus haut, définies par les égalités

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2,$$

on a vu que, si u croît de o à ω_2, pu décroît constamment de $+\infty$ à e_2. L'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $x = pu$ étant mise sous la forme

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

on obtient, en faisant croître u de o à ω_2, l'égalité

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

qui donne l'expression de ω_2 en fonction de g_2 et de g_3.

Pour avoir l'expression correspondante de $\frac{\omega'_2}{i}$ remarquons que si l'on remplace les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ par les suivantes

$$2i\omega_1 = \frac{\omega'_2}{i} + i\omega_2, \qquad -2i\omega_3 = \frac{\omega'_2}{i} - i\omega_2,$$

il faut remplacer

$$\omega_2, \quad g_2, \quad g_3, \quad e_2$$

par

$$\frac{\omega'_2}{i}, \quad g_2, \quad -g_3, \quad -e_2.$$

L'égalité précédente devient, par ce changement,

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_{-e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}.$$

150. Les intégrales donnant les valeurs de ω_2 et $\frac{\omega'_2}{i}$ ramenées à la forme canonique de Legendre. — L'intégrale qui donne la valeur de ω_2 peut s'écrire

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Faisons le changement de variable

$$x - e_2 = z^2,$$

l'intégrale devient

$$\omega_2 = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + e_2 - e_1)(z^2 + e_2 - e_3)}}.$$

Les quantités $e_2 - e_1$ et $e_2 - e_3$ sont imaginaires conjuguées. Posons

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad \rho > 0,$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi), \qquad 0 < \psi < \pi.$$

La chose est possible, car nous avons pris ρ positif, et nous avons désigné par e_1 la racine imaginaire pour laquelle le coefficient de i est positif; nous avons donc bien le droit de choisir ψ entre 0 et π. Le polynome bicarré qui se trouve sous le radical peut alors s'écrire

$$z^4 + 2z^2\rho\cos\psi + \rho^2 = (z^2 + \rho)^2 - 4z^2\rho\sin^2\frac{\psi}{2},$$

de sorte qu'en posant

$$z = t\sqrt{\rho}, \qquad \sin^2\frac{\psi}{2} = k_1^2,$$

on a

$$\omega_2\sqrt{\rho} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2 t^2}};$$

le coefficient différentiel de la nouvelle intégrale ne fait que changer de signe quand on pose

$$t = \frac{1}{t'}$$

et que l'on néglige ensuite l'accent. On en déduit

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2 t^2}} = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2 t^2}},$$

puis

$$\omega_2\sqrt{\rho} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2 t^2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\sqrt{1 - k_1^2\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2}};$$

et il n'y a plus qu'à poser

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\varphi \quad \text{ou} \quad t = \tang\frac{\varphi}{2},$$

pour obtenir l'égalité

$$\omega_2\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}},$$

dans laquelle l'intégrale est de la forme normale de Legendre (*voir* n° 113).

Transformons de même l'intégrale

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x+e_1)(x+e_2)(x+e_3)}}.$$

En faisant le changement de variable

$$x = -e_2 + z^2,$$

il vient

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2+e_1-e_2)(z^2+e_3-e_2)}},$$

puis, en introduisant, comme dans ce qui précède, le module ρ et les arguments ψ et $-\psi$ des quantités imaginaires conjuguées, e_2-e_3 et e_2-e_1, nous aurons

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2+\rho)^2-4z^2\rho\cos^2\frac{\psi}{2}}}.$$

Posons

$$z = t\sqrt{\rho}, \qquad \cos^2\frac{\psi}{2} = k_1'^2,$$

nous trouverons

$$\sqrt{\rho}\,\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2-4k_1'^2t^2}},$$

et, en tenant compte de l'égalité

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2-4k_1'^2t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1'^2\sin^2\varphi}},$$

nous obtenons pour $\frac{\omega'_2}{i}$ une expression de la forme cherchée.

Réunissons les deux formules qui viennent d'être démontrées :

$$\omega_2 \sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}}, \qquad k_1^2 = \sin^2\frac{\psi}{2},$$

$$\frac{\omega_2'}{i} \sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}, \qquad k_1'^2 = \cos^2\frac{\psi}{2},$$

ρ et ψ étant définis par les égalités

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad \rho > 0,$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi), \qquad 0 < \psi < \pi.$$

Ces dernières intégrales, dans lesquelles on fait

$$\sin\varphi = z,$$

prennent la forme des intégrales qui donnent K et K' dans le n° 110.

151. Variation du rapport $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$. — Des égalités précédentes on déduit

$$\frac{i\omega_2}{\omega_2'} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}};$$

et l'on voit que le rapport $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$ augmente constamment quand k_1^2 croît de 0 à 1, car le numérateur augmente et le dénominateur diminue. Ce rapport est égal à zéro pour $k_1^2 = 0$, il est égal à $+\infty$ pour $k_1^2 = 1$; il passe donc une fois et une fois seulement par une valeur positive donnée quand k_1^2 croît de 0 à 1.

On peut alors vérifier, en se servant des seules intégrales ci-dessus, que, si les valeurs de ω_2 et de $\frac{\omega_2'}{i}$ sont données, chacune des racines e_1, e_2, e_3 a une valeur unique. En effet, $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$ ayant une valeur positive donnée, k_1^2 a une valeur unique comprise entre 0 et 1; k_1^2 étant ainsi déterminé, l'égalité qui définit ω_2, par exemple,

montre que $\sqrt{\rho}$ a une valeur unique, le radical étant pris avec le signe $+$. Pour passer de là aux valeurs de e_1, e_2, e_3, remarquons que $\cos\psi$ et $\sin\psi$, définis par

$$\cos\psi = k_1'^2 - k_1^2, \qquad \sin\psi = 2k_1k_1', \qquad 0 < \psi < \pi,$$

sont déterminés sans ambiguïté. Alors les égalités

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad \begin{aligned} e_2 - e_3 &= \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \\ e_2 - e_1 &= \rho(\cos\psi - i\sin\psi) \end{aligned}$$

déterminent une valeur unique pour chacune des racines e_1, e_2, e_3.

III. — Retour a la fonction p a discriminant positif. Expressions des périodes sous la forme canonique de Legendre.

152. Les intégrales qui définissent les périodes ramenées à la forme canonique de Legendre. — Nous allons ramener à la forme canonique de Legendre les intégrales qui définissent ω et $\frac{\omega'}{i}$, dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réelles (*voir* nos 55 et 56).

On a d'abord

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable

$$x = e_3 + \frac{g^2}{z^2}, \qquad dx = -\frac{2g^2\,dz}{z^3},$$

g étant une constante indéterminée; l'élément de l'intégrale devient

$$\frac{-dz}{g\sqrt{\left(1 - \frac{e_1 - e_3}{g^2}z^2\right)\left(1 - \frac{e_2 - e_3}{g^2}z^2\right)}}.$$

Dans le produit qui figure sous le radical, le premier facteur se réduira à $1 - z^2$, si nous posons

$$g^2 = e_1 - e_3,$$

et le second facteur deviendra alors $(1 - k^2 z^2)$, en posant

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3};$$

k^2 est un nombre positif et plus petit que un : le coefficient différentiel a donc la forme cherchée. En mettant maintenant les nouvelles limites de l'intégrale, nous trouvons

$$g\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

ce qui est la forme cherchée.

Transformons de même l'intégrale

$$\frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x^3 + g_3}} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x + e_1)(x + e_2)(x + e_3)}};$$

en faisant le changement de variable

$$x = -e_1 + \frac{g^2}{z^2}, \qquad dx = -2g^2 \frac{dz}{z^3},$$

l'élément de l'intégrale devient

$$\frac{-dz}{g\sqrt{\left(1 - \frac{e_1 - e_2}{g^2} z^2\right)\left(1 - \frac{e_1 - e_3}{g^2} z^2\right)}};$$

sous le radical, le second facteur devient égal à $1 - z^2$ si nous posons

$$g^2 = e_1 - e_3,$$

et le premier facteur devient alors $1 - k'^2 z^2$, en posant

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

k'^2 est positif et plus petit que 1. Nous avons donc

$$g\frac{\omega'}{i} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}}.$$

Réunissons les deux résultats précédents, en faisant dans les

intégrales le changement de variable $z = \sin\varphi$, nous avons

$$\omega g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\omega'}{i} g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

$$g = \sqrt{e_1 - e_3}, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

On nomme g le multiplicateur; k est le module, k' le module complémentaire.

153. **Variation du rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$.** — Considérons, maintenant, le rapport

$$\frac{\omega'}{i\omega} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}}.$$

En raisonnant comme au n° 151, on reconnaît que, si k^2 croît de 0 à 1, le rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$ décroît constamment de $+\infty$ à 0.

D'après cela, on peut encore vérifier qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs de k^2 et de g pour lequel les intégrales ω et $\frac{\omega'}{i}$ prennent des valeurs données, si l'on suppose g positif et k^2 pris entre 0 et 1. En effet, le rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$ ayant une valeur donnée, il n'y a pour k^2 qu'une seule valeur comprise entre 0 et 1; k^2 étant déterminé, l'égalité qui donne la valeur de $g\omega$, par exemple, donnera pour g une valeur unique.

Les quantités k^2 et g étant déterminées, on a immédiatement

$$e_1 - e_3, \qquad e_2 - e_3.$$

La somme de ces quantités est égale à $-3e_3$; puis, des différences connues $e_1 - e_3$, $e_2 - e_3$, on déduit e_1 et e_2.

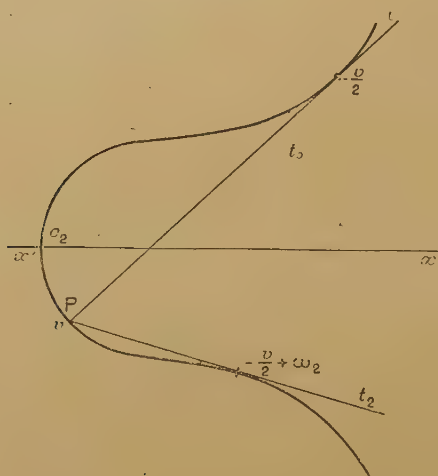
Ajoutons enfin que les résultats des n^{os} 151 et 153 nous permettront bientôt de justifier complètement notre hypothèse fondamentale du n° 34 dans le cas où les invariants g_2 et g_3 sont réels. (Chap. VIII, n° 168).

IV. — Cas du discriminant négatif. Application géométrique.

154. Étude de la courbe $x = pu$, $y = p'u$, $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. — Nous insisterons seulement sur les différences que le cas de $\Delta < 0$ présente avec le cas déjà étudié de $\Delta > 0$.

Si x et y sont tous deux réels, on peut toujours, en ajoutant des périodes, ramener l'argument à être réel et compris entre $-\omega_2$ et $+\omega_2$ (nº 148). Quand on change u en $-u$, x ne change pas, y change de signe; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et il suffit de faire varier u de 0 à ω_2.

Fig. 31.



Quand u croît de 0 à ω_2, y est négatif, x décroît constamment de $+\infty$ à e_2. La tangente au point situé sur Ox est parallèle à Oy; la direction asymptotique est celle de Oy. On a donc la forme de courbe indiquée par la figure 31.

La courbe n'a pas de points en dehors de la branche infinie, comme cela se présentait dans le cas du discriminant positif.

Tangentes parallèles à Ox. — Les points où la tangente est parallèle à Ox sont donnés par l'équation

$$p''u = 6x^2 - \frac{1}{2}g_2 = 0, \qquad x = pu.$$

Quand g_2 est négatif, il n'y a pas de points où la tangente soit parallèle à Ox.

Quand g_2 est positif, les deux valeurs de x qui annulent $\wp'' u$ sont réelles; mais pour qu'à une valeur réelle de x corresponde une valeur réelle de y, il faut et il suffit que l'on ait

$$x > e_2.$$

Nous avons donc à chercher, en supposant $g_2 > 0$, combien l'équation

$$\wp'' u = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0$$

a de racines plus grandes que e_2 et nous sommes ainsi conduits à substituer e_2 à la place de x dans le polynome entier en x qui donne la valeur de $\wp'' u$.

Ce polynome se présente sous une forme plus commode, si l'on dérive par rapport à u les deux membres de l'identité

$$\wp'^2 u = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \qquad x = \wp u.$$

On trouve, après avoir supprimé le facteur commun $\wp' u$,

$$\frac{1}{2} \wp'' u = (x - e_2)(x - e_3) + (x - e_1)(x - e_3) + (x - e_1)(x - e_2)$$

et la valeur du polynome pour $x = e_2$ est

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3);$$

comme les deux facteurs $e_2 - e_1$, $e_2 - e_3$ sont imaginaires conjugués, le résultat de la substitution est positif. Donc e_2 est supérieur à la plus grande racine ou inférieur à la plus petite, et comme ces deux racines sont de signes contraires, c'est le premier cas qui se présente quand e_2 est positif et le second quand e_2 est négatif. Or, le signe de e_2 est le même que celui de g_3, puisque l'on a

$$g_3 = e_1 e_3 e_2.$$

En définitive, *pour qu'il existe sur la courbe des points où la tangente est parallèle à* Ox, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$g_2 > 0, \qquad g_3 < 0.$$

Dans le cas contraire, la courbe présente la forme de la figure 31.

Tangentes menées d'un point P. — Si le point P a pour paramètre v, les points de contact ont pour paramètres

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \qquad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1, \qquad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_1 + \omega_3, \qquad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3.$$

Comme v est réel et que ω_1 et ω_3 sont imaginaires conjugués, u_0 et u_2 sont réels, u_1 et u_3 imaginaires conjugués.

Ainsi, *par un point de la courbe, on ne peut mener que deux tangentes réelles à la courbe.*

V. — Discriminant négatif; application au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse (1).

155. Équations différentielles et intégrales premières. — Prenons pour origine O la position initiale du projectile, pour direction de l'axe des x la direction de la vitesse initiale, pour axe des y la verticale descendante. Soit α l'angle de Ox avec l'horizontale, α étant regardé comme positif quand Ox est au-dessus de l'horizon : l'angle des axes est alors $\frac{\pi}{2}+\alpha$. La résistance de l'air est une force dirigée en sens inverse de la vitesse, et égale à cv^3, v désignant la vitesse, et c une constante.

En désignant par x et y les coordonnées du mobile, et par s l'arc décrit sur la trajectoire à partir d'une origine fixe, la force due à la résistance du milieu a pour projections sur les axes Ox, Oy

$$-c\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\frac{dx}{ds}, \qquad -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\frac{dy}{ds},$$

ou bien

$$-c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt}, \qquad -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dy}{dt},$$

et les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dy}{dt} + g.$$

(1) *Voir* Greenhill, *Fonctions elliptiques*, traduction de Griess, p. 375.

Éliminons entre les équations (1) et (2) les termes qui proviennent de la résistance; il vient

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{dx}{dt},$$

ou bien, en posant $\mu = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d\mu}{dt}\frac{dx}{dt} = g. \tag{3}$$

D'autre part, en remplaçant, dans l'équation (1), ds par sa valeur tirée de

$$ds^2 = dy^2 - 2\,dy\,dx\sin\alpha + dx^2,$$

nous trouvons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^3(\mu^2 - 2\mu\sin\alpha + 1),$$

puis, en tenant compte de l'équation (3),

$$-\frac{g}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-4}\frac{d^2x}{dt^2} = (\mu^2 - 2\mu\sin\alpha + 1)\frac{d\mu}{dt}. \tag{4}$$

Les deux membres de l'équation (4) sont les dérivées de fonctions qui s'obtiennent immédiatement. Intégrons de 0 à t, il vient

$$\frac{1}{3}\frac{g}{c}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-3} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}\right] = \frac{1}{3}\mu^3 - \mu^2\sin\alpha + \mu,$$

en remarquant que, d'après le choix des axes, $\mu = 0$ pour $t = 0$. *Nous supposerons la vitesse initiale très grande*, et nous négligerons le terme $\frac{1}{3}\frac{g}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}$, de sorte que, en posant $\frac{g}{c} = \varpi^3$ et

$$P = \mu^3 - 3\mu^2\sin\alpha + 3\mu,$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = \varpi P^{-\frac{1}{3}}. \tag{5}$$

L'équation (3) donne alors

$$\frac{g}{\varpi}dt = P^{-\frac{1}{3}}d\mu$$

et, en intégrant,

$$\frac{gt}{\varpi} = \int_0^\mu P^{-\frac{1}{3}}d\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2\sin\alpha + 3\mu)^{\frac{1}{3}}}. \tag{6}$$

D'autre part, en remarquant que l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{d\mu}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g,$$

et en y remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur tirée de (5), on trouve

$$\frac{g}{w^2}\,dx = \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}}\,d\mu,$$

puis

$$\frac{g}{w^2}\,dy = \mu\,\mathrm{P}^{-\frac{2}{3}}\,d\mu,$$

et enfin, intégrant,

$$(7)\qquad \frac{g}{w^2}\,x = \int_0^\mu \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}}\,d\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2\sin\alpha + 3\mu)^{\frac{2}{3}}},$$

$$(8)\qquad \frac{g}{w^2}\,y = \int_0^\mu \mu\,\mathrm{P}^{-\frac{2}{3}}\,d\mu = \int_0^\mu \frac{\mu\,d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2\sin\alpha + 3\mu)^{\frac{2}{3}}}.$$

Les équations (7) et (8) définissent la trajectoire au moyen de la variable auxiliaire μ et l'équation (6) donne la valeur de t pour chaque position du mobile. On voit de suite que le polynome

$$\mathrm{P} = \mu(\mu^2 - 3\mu\sin\alpha + 3)$$

n'a d'autres racines réelles que zéro, et l'on en conclut aisément que, quand μ croît de o à $+\infty$, t et y deviennent infinis, et x tend vers une limite : nous désignerons cette limite par a. Il est, en outre, facile de voir que la vitesse tend vers une valeur limite et que w est la valeur de cette limite. En effet, l'équation (5) montre que, pour $\mu = \infty$, on a

$$w = \lim \mu\frac{dx}{dt},$$

et l'égalité

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2(\mu^2 - 2\mu\sin\alpha + 1)$$

montre ensuite que, $\mu\frac{dx}{dt}$ ayant une limite, $\frac{ds}{dt}$ a une limite qui est la même.

Ainsi, la trajectoire admet une asymptote verticale, la droite $x = a$, et lorsque le mobile descend indéfiniment sur la branche de courbe asymptote à cette droite, la vitesse tend vers une valeur limite w.

On vérifierait d'ailleurs aisément que ces résultats subsisteraient même si l'on n'avait pas négligé le terme en $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}$.

156. Intégration par les fonctions elliptiques. — On peut ramener l'intégrale qui donne la valeur de $\frac{gx}{w^2}$ (équation 7) à une intégrale elliptique ayant la forme canonique de Weierstrass.

Pour cela, faisons la substitution

$$z = \frac{m^2 P^{\frac{1}{3}}}{\mu}, \qquad z^3 = m^6 \frac{\mu^2 - 3\mu \sin\alpha + 3}{\mu^2},$$

m étant un facteur constant arbitraire. Nous pourrons déterminer g_3 de façon que, dans l'expression

$$4z^3 - g_3 = \frac{(4m^6 - g_3)\mu^2 - 12 m^6 \mu \sin\alpha + 12 m^6}{\mu^2},$$

le trinome du second degré en μ soit carré parfait; il suffit de poser

$$4m^6 - g_3 = 3m^6 \sin^2\alpha,$$

d'où

$$g_3 = m^6(4 - 3\sin^2\alpha).$$

Il vient alors

$$\sqrt{4z^3 - g_3} = m^3\sqrt{3}\,\frac{2 - \mu\sin\alpha}{\mu},$$

et, en différentiant,

$$\frac{6z^2\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = -\frac{2m^3\sqrt{3}\,d\mu}{\mu^2}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = -\frac{m^3\sqrt{3}\,d\mu}{3\mu^2 z^2} = -\frac{d\mu}{m\sqrt{3}\,P^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{m\sqrt{3}}\,g\frac{dx}{w^2};$$

en prenant $m^2 = \frac{1}{3}$, on a donc, en définitive,

$$\frac{gx}{w^2} = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}}.$$

On en conclut

(9) $$z = p\left(\frac{gx}{w^2};\, 0,\, g_3\right),$$

puis, d'après l'expression de dz,

$$\wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right) = \frac{\mu \sin\alpha - 2}{3\mu},$$

le signe de $\wp'$ étant défini par cette égalité même. Quand x est égal à l'abscisse a de l'asymptote verticale, $\mu = \infty$, on a

$$\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right) = \frac{\sin\alpha}{3}, \qquad \wp\left(\frac{ga}{w^2}\right) = \frac{1}{3},$$

et, par suite,

$$\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right) = \frac{2}{3\mu}.$$

D'après cette dernière équation, on a

$$\mu = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3}}{\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right)} = \frac{6\wp^2\left(\frac{ga}{w^2}\right)}{\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right)};$$

et en intégrant

(10) $$y = \int_0^x \frac{6\wp^2\left(\frac{ga}{w^2}\right)}{\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right)}\,dx.$$

C'est l'équation de la trajectoire.

Écrivons u et v au lieu de $\frac{gx}{w^2}$ et de $\frac{ga}{w^2}$; l'équation prend la forme

(11) $$\frac{gy}{w^2} = \int_0^u \frac{6\wp^2 v\,du}{\wp' v - \wp' u}$$

et nous allons pouvoir l'intégrer en appliquant la règle du n° 50.

Pour rendre le dénominateur rationnel, multiplions par $\wp' v + \wp' u$ les deux termes de la fraction sous le signe somme et tenons compte de ce que, g_2 étant nul, on a

$$\begin{aligned}\wp'^2 v - \wp'^2 u &= 4(\wp^3 v - \wp^3 u),\\ &= 4(\wp v - \wp u)(\varepsilon\wp v - \wp u)(\varepsilon^2\wp v - \wp u),\end{aligned}$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

En opérant la décomposition en fractions simples, on a

$$(12)\quad \frac{6\,\mathrm{p}^2 v}{\mathrm{p}'v - \mathrm{p}'u} = \frac{6\,\mathrm{p}^2 v(\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u)}{4(\mathrm{p}^3 v - \mathrm{p}^3 u)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}v - \mathrm{p}u} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u}{\varepsilon\,\mathrm{p}v - \mathrm{p}u} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u}{\varepsilon^2\mathrm{p}v - \mathrm{p}u}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}v - \mathrm{p}u} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mathrm{p}'\varepsilon v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}\varepsilon v - \mathrm{p}u} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{p}'\varepsilon^2 v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}\varepsilon^2 v - \mathrm{p}u},$$

car si dans la formule d'homogénéité (n° 36)

$$\mathrm{p}\left(\frac{u}{\mu};\ \mu^4 g_2,\ \mu^6 g_3\right) = \mu^2\mathrm{p}(u;\ g_2,\ g_3),$$

on fait $g_2 = 0$ et $\mu = \varepsilon$ puis $\mu = \varepsilon^2$, et si l'on remarque que $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2$, on trouve

$$\mathrm{p}(u\varepsilon^2;\ 0,\ g_3) = \varepsilon^2\mathrm{p}(u;\ 0,\ g_3),$$
$$\mathrm{p}(u\varepsilon;\ 0,\ g_3) = \varepsilon\,\mathrm{p}(u;\ 0,\ g_3),$$

puis, en prenant les dérivées

$$\mathrm{p}'(u\varepsilon^2;\ 0,\ g_3) = \mathrm{p}'(u;\ 0,\ g_3),$$
$$\mathrm{p}'(u\varepsilon;\ 0,\ g_3) = \mathrm{p}'(u;\ 0,\ g_3).$$

Des équations (11) et (12), on conclut

$$(13)\quad \frac{gy}{w^2} = \int_0^u\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}v - \mathrm{p}u} + \varepsilon\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'\varepsilon v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}\varepsilon v - \mathrm{p}u} + \varepsilon^2\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'\varepsilon^2 v + \mathrm{p}'u}{\mathrm{p}\varepsilon^2 v - \mathrm{p}u}\right)du.$$

Mais, si dans la formule d'addition pour ζu [n° 44, éq. (65)], on remplace v par $-v$, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \zeta(u - v) - \zeta u + \zeta v.$$

Dans cette égalité changeons v en εv puis en $\varepsilon^2 v$ et remarquons que, d'après la formule d'homogénéité (n° 36), $\zeta\varepsilon v = \varepsilon^2\zeta v$ et $\zeta\varepsilon^2 v = \varepsilon\zeta v$; nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'\varepsilon v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\varepsilon v} = \zeta(u - \varepsilon v) - \zeta u + \varepsilon^2\zeta v,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'\varepsilon^2 v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\varepsilon^2 v} = \zeta(u - \varepsilon^2 v) - \zeta u + \varepsilon\zeta v.$$

D'après cela, l'équation (13) peut s'écrire, en tenant compte de

ce que $1+\varepsilon+\varepsilon^2$ est nul,

$$\frac{gy}{\omega^2}=\int_0^u[-3\zeta v-\zeta(u-v)-\varepsilon\zeta(u-\varepsilon v)-\varepsilon^2\zeta(u-\varepsilon^2 v)]\,du,$$

et l'on obtient enfin

$$\frac{gy}{\omega^2}=-3u\zeta v-\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}-\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(\varepsilon v-u)}{\sigma\varepsilon v}-\varepsilon^2\,\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(\varepsilon^2 v-u)}{\sigma\varepsilon^2 v}.$$

L'expression du temps t se trouve au moyen de l'équation (6) qui donne, par un calcul analogue,

$$\begin{aligned}\frac{gt}{\omega}&=\int_0^u\frac{6\,p v\,p u}{p' v-p' u}\,du\\&=\int_0^u\left(\frac{1}{2}\,\frac{p' u+p' v}{p v-p u}+\frac{1}{2}\,\varepsilon^2\,\frac{p'\varepsilon v+p' u}{p\varepsilon v-p u}+\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\frac{p'\varepsilon^2 v+p' u}{p\varepsilon^2 v-p u}\right)du,\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{gt}{\omega}=-\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}-\varepsilon^2\,\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(\varepsilon v-u)}{\sigma\varepsilon v}-\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(\varepsilon^2 v-u)}{\sigma\varepsilon^2 v}.$$

157. **Développement de y et de t en séries entières ordonnées suivant les puissances de $u=g\dfrac{x}{\omega^2}$.** — Lorsqu'on se propose de développer y et t suivant les puissances entières de u, il est commode d'employer la fonction

$$\psi(u,v)=\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}\,e^{u\zeta v},$$

qui est égale à 1 pour $u=0$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{gy}{\omega^2}&=-\mathrm{Log}\,\psi(u,v)-\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\psi(u,\varepsilon v)-\varepsilon^2\,\mathrm{Log}\,\psi(u,\varepsilon^2 v),\\\frac{gt}{\omega}&=-\mathrm{Log}\,\psi(u,v)-\varepsilon^2\,\mathrm{Log}\,\psi(u,\varepsilon v)-\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\psi(u,\varepsilon^2 v).\end{aligned}$$

Prenons les dérivées logarithmiques et développons suivant les puissances de u par la formule de Taylor :

$$\frac{1}{\psi}\,\frac{d\psi}{du}=-\zeta(v-u)+\zeta v=-u\,p v+\frac{u^2}{2!}\,p' v-\frac{u^3}{3!}\,p'' v+\ldots;$$

en intégrant de nouveau, on obtient

$$(18)\qquad \mathrm{Log}\,\psi(u,v)=-\frac{u^2}{2!}\,p v+\frac{u^3}{3!}\,p' v-\frac{u^4}{4!}\,p'' v+\ldots.$$

Donc, en remarquant que $g_2 = 0$ et $p\varepsilon v = \varepsilon p v$,

$$(19) \qquad \operatorname{Log}\psi(u,\ \varepsilon v) = -\frac{u^2}{2!}\varepsilon p v + \frac{u^3}{3!}p' v - \frac{u^4}{4!}\varepsilon^2 p'' v \ldots,$$

$$(20) \qquad \operatorname{Log}\psi(u,\ \varepsilon^2 v) = -\frac{u^2}{2!}\varepsilon^2 p v + \frac{u^3}{3!}p' v - \frac{u^4}{4!}\varepsilon p'' v \ldots.$$

On en conclut

$$\frac{gy}{w^2} = 3\left[\frac{u^4}{4!}p'' v - \frac{u^7}{7!}p^{(5)} v + \frac{u^{10}}{10!}p^{(8)} v + \ldots\right].$$

$$\frac{gt}{w} = 3\left[\frac{u^2}{2!}p v - \frac{u^5}{5!}p''' v + \frac{u^8}{8!}p^{(6)} v + \ldots\right].$$

Dans ces formules, on doit poser

$$u = \frac{gx}{w^2}, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{1}{27}(4 - 3\sin^2\alpha),$$

$$p v = \frac{1}{3}, \qquad p' v = \frac{1}{3}\sin\alpha, \qquad p'' v = \frac{2}{3}, \qquad p''' v = \frac{4}{3}\sin\alpha, \quad \ldots$$

Le discriminant étant négatif, les périodes de p s'expriment à l'aide des formules des n^{os} 149 et suivants.

Les dérivées $p'' v$, $p''' v$, ... se calculent par voie récurrente, en dérivant un nombre quelconque de fois la relation

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_3$$

et faisant ensuite $u = v$.

CHAPITRE VII.

INTÉGRALES ELLIPTIQUES. RÉDUCTION A LA FORME NORMALE DE LEGENDRE ET DE JACOBI. INVERSION.

I. — Intégrales elliptiques.

158. **Exemple élémentaire de la méthode employée pour calculer les intégrales elliptiques.** — On démontre, dans les éléments du Calcul intégral, que l'intégrale d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un trinome du second degré $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ peut être ramenée, par un changement de variable, à l'intégrale d'une fonction rationnelle ou à l'intégrale d'une fonction trigonométrique.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue, pour rattacher à des notions élémentaires le problème que nous traitons dans ce Chapitre. Soit

$$\int R(x, y)\,dx \tag{1}$$

une intégrale où $R(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et y, y étant liée à x par l'équation

$$y = \sqrt{ax^2+2bx+c}. \tag{2}$$

Si l'on fait un changement de variable, en prenant comme nouvelle variable u l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}, \tag{3}$$

l'intégrale proposée (1) devient l'intégrale d'une fonction trigonométrique. Pour le vérifier, écrivons

$$y = \sqrt{-a}\sqrt{-\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2-ac}{a^2}},$$

et posons

$$x + \frac{b}{a} = z\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \sqrt{-a} = \lambda;$$

il vient, en choisissant pour x_0 la valeur $-\frac{b}{a}$ qui annule z,

$$\lambda u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad z = \sin\lambda u,$$

$$(4) \qquad x = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}\sin\lambda u, \qquad y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{b^2 - ac}\cos\lambda u,$$

$$dx = y\,du.$$

Avec cette nouvelle variable u, l'intégrale (1) devient l'intégrale d'une fonction rationnelle de $\sin\lambda u$ et $\cos\lambda u$, intégrale que l'on sait calculer.

En employant un langage géométrique, on peut dire que l'équation (2) représente une conique, et que les formules (4) expriment les coordonnées d'un point de cette conique en fonctions uniformes de u.

159. **Intégrales elliptiques.** — Considérons une intégrale de la forme

$$(5) \qquad \int R(x, y)\,dx,$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle des deux variables x et y liées par la relation

$$(6) \qquad y = \sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4},$$

dans laquelle le polynome sous le radical est du quatrième ou du troisième degré. Une intégrale de ce genre s'appelle une *intégrale elliptique*. Les intégrales elliptiques ont fait l'objet des recherches de Legendre, avant la découverte des fonctions elliptiques par Abel. Pour les calculer, on peut faire un changement de variable en prenant comme nouvelle variable u l'intégrale

$$(7) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}.$$

Les quantités x et y deviennent alors, comme nous le montrerons, des fonctions elliptiques de u et le calcul de l'intégrale (5)

est ramené au calcul de l'intégrale d'une fonction elliptique, calcul que l'on sait faire à l'aide de la décomposition en éléments simples.

En employant un langage géométrique, on peut dire que les coordonnées x et y d'un point de la courbe (6) s'expriment par des fonctions elliptiques de la variable u, ce qui permet de transformer l'intégrale (5) en l'intégrale d'une fonction elliptique.

160. **Premières réductions de l'intégrale elliptique.** — Dans la fonction rationnelle $R(x, y)$ on peut toujours remplacer les puissances paires de y par les puissances du polynome

$$y^2 = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

et ramener cette fonction à la forme

$$\frac{P + Qy}{P_1 + Q_1 y},$$

P, Q, P_1, Q_1 désignant des polynomes en x. Si l'on multiplie et divise par $P_1 - Q_1 y$ en remplaçant encore y^2 par sa valeur, on obtient une expression de la forme

$$R(x) + y R_1(x),$$

où $R(x)$ et $R_1(x)$ sont des fonctions rationnelles de x. L'intégrale I se partage alors en deux parties :

$$I = \int R(x)\,dx + \int y R_1(x)\,dx,$$

dont la première s'obtient immédiatement, comme l'intégrale d'une fonction rationnelle. Quant à la seconde, nous l'écrirons, en multipliant et divisant l'élément différentiel par y,

$$\int \frac{S(x)}{y}\,dx,$$

$S(x)$ étant une fonction rationnelle de x,

$$S(x) = y^2 R_1(x).$$

II. — Forme normale de Legendre. Intégrales de Jacobi.

161. **Forme normale de Legendre.** — On dit qu'*une intégrale elliptique est ramenée à la forme normale de Legendre* quand

la racine carrée y est de la forme

$$y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

(*cf* n° 97, p. 141), où k désigne une constante appelée le *module*. Dans les recherches théoriques, cette constante k a une valeur quelconque réelle ou imaginaire; dans les applications à la Géométrie, à la Physique, à la Mécanique, elle est réelle, et, comme nous le verrons, on peut la supposer moindre que l'unité.

La racine carrée y ayant cette forme, voyons comment on peut calculer une intégrale de la forme

$$I = \int \frac{S(x)}{y}\,dx,$$

à laquelle on peut réduire toute intégrale elliptique, d'après le paragraphe précédent. Actuellement on peut encore, par des procédés algébriques, simplifier cette intégrale, en profitant de ce que y est la racine carrée d'un polynome *bicarré*. La fonction rationnelle $S(x)$ peut toujours s'écrire

$$\mathcal{R}(x^2) + x\,\mathcal{R}_1(x^2),$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ sont des fonctions rationnelles de x^2. L'intégrale s'écrit alors

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y} + \int \frac{x\,R_1(x^2)\,dx}{y}.$$

La deuxième intégrale se ramène immédiatement à une intégrale élémentaire par la substitution

$$x^2 = z,$$

qui donne l'expression

$$\int \frac{\mathcal{R}_1(z)\,dz}{2\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}$$

où le polynome sous le radical n'est plus que du second degré en z. Finalement, on est donc ramené à l'intégrale

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y}, \qquad y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Si l'on y fait le changement de variable

$$u = \int_0^x \frac{dx}{y} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad x = \mathrm{sn}(u, k),$$

elle devient

$$\int \mathcal{R}(\mathrm{sn}^2 u)\, du,$$

intégrale d'une fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2iK'$. Pour la calculer, il faut décomposer la fonction elliptique en éléments simples, en procédant comme nous avons fait au n° 50 dans une question qui, au fond, est identique à la question actuelle. On décomposera d'abord la fonction rationnelle de x^2, $\mathcal{R}(x^2)$, en fractions simples

$$\mathcal{R}(x^2) = c_0 + c_1 x^2 + \ldots + c_p x^{2p} + \frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^4} + \ldots + \frac{b_m}{x^{2m}}$$
$$+ \sum \left[\frac{A}{x^2 - \alpha} + \frac{A_1}{(x^2-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(x^2-\alpha)^p} \right],$$

où nous mettons à part les termes en x et en $\frac{1}{x}$ quand ils existent; la somme Σ est alors relative aux racines α qui sont différentes de zéro.

Faisant ensuite $x = \mathrm{sn}\, u$, on sera ramené à calculer les intégrales des types suivants

$$(8) \qquad \int \mathrm{sn}^2 u\, du, \quad \int \mathrm{sn}^4 u\, du, \quad \ldots, \quad \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u}, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{sn}^{2n} u\, du,$$

où n est un entier positif ou négatif,

$$(9) \qquad \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u - \alpha}, \quad \int \frac{du}{(\mathrm{sn}^2 u - \alpha)^2}, \quad \ldots, \quad \int \frac{du}{(\mathrm{sn}^2 u - \alpha)^p},$$

où α est différent de zéro. Ces intégrales sont faciles à obtenir par la décomposition en éléments simples.

On peut, par voie récurrente, ramener toutes les intégrales du type (8) à la première de ce type. Quant aux intégrales du type (9), elles se déduisent de la première en la différentiant par rapport à α. De là l'importance particulière des premières intégrales de chaque type. Nous allons les calculer.

162. Intégrales de première, deuxième et troisième espèce, d'après Legendre et Jacobi. — 1° On appelle intégrale de *pre-*

mière espèce l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{y} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

2° On appelle intégrale de *deuxième espèce* l'intégrale

$$k^2 \int_0^x \frac{x^2\,dx}{y},$$

qui devient, quand on y fait $x = \operatorname{sn} u$,

$$k^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du.$$

Cette intégrale, que Jacobi désigne par $Z(u)$ a pour valeur (n° 102)

$$u\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Quand u augmente de $2K$ ou de $2iK'$, l'expression que nous venons de trouver pour l'intégrale de deuxième espèce éprouve des accroissements constants

$$2J = 2K\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \qquad 2iJ' = 2iK'\left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\pi}{2KK'}\right],$$

que l'on appelle *modules de périodicité de l'intégrale de deuxième espèce*. On en déduit la relation

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

3° On appelle intégrale de *troisième espèce* l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2-\alpha)y},$$

qui devient, quand on y fait $x = \operatorname{sn} u$,

$$\int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \alpha},$$

où α est différent de zéro. Pour la calculer, déterminons un argument a par la condition

$$\operatorname{sn}^2 a = \alpha,$$

nous aurons à calculer l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a},$$

qui est donnée par la formule suivante établie au n° 102

$$(10) \qquad \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(u-a)}{\mathrm{H}(u-a)} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(u+a)}{\mathrm{H}(u+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

d'où

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\mathrm{H}(a-u)}{\mathrm{H}(a+u)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Si, dans la formule de décomposition (10) on change u en $u+i\mathrm{K}'$, elle devient, d'après la relation

$$\operatorname{sn}(u+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

et la formule donnant $\mathrm{H}(u+i\mathrm{K}')$ en fonction de $\Theta(u)$,

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)} - \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Pour désigner l'intégrale du premier membre prise de o à u, Jacobi emploie la notation $\Pi(u, a)$:

$$\Pi(u, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\Theta(a-u)}{\Theta(a+u)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

4° *Formule récurrente pour le calcul de* $\int \operatorname{sn}^{2n} u\, du$. — En calculant l'expression

$$\frac{d}{du}[\operatorname{sn}^{2n-3} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u]$$

et désignant, pour abréger, par s la fonction $\operatorname{sn} u$, on trouve

$$(2n-3)s^{2n-4}(1-s^2)(1-k^2s^2) - s^{2n-2}(1-k^2s^2) - k^2 s^{2n-2}(1-s^2)$$

ou, en ordonnant

$$(2n-3)s^{2n-4} - (2n-2)(1+k^2)s^{2n-2} + (2n-1)k^2 s^{2n}.$$

En intégrant, on a

$$\operatorname{sn}^{2n-3} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = (2n-3)\int s^{2n-4}\,du \\ -(2n-2)(1+k^2)\int s^{2n-2}\,du + (2n-1)k^2\int s^{2n}\,du,$$

formule qui permet de calculer toutes les intégrales $\int s^{2n}\,du$ (que n soit positif ou négatif, car on a toujours $2n-3$ et $2n-1 \neq 0$) en fonction des deux premières, correspondant à $n=0$ et $n=1$.

III. — Réduction a la forme normale de Legendre.

163. Cas d'un polynome bicarré. — Soit l'intégrale elliptique

$$\int \frac{S(x)}{y}\,dx,$$

où $S(x)$ est une fonction rationnelle de x, et y la racine carrée d'un polynome bicarré

$$y = \sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C}.$$

On peut encore écrire, comme dans le paragraphe précédent,

$$S(x) = \mathcal{R}(x^2) + x\,\mathcal{R}_1(x^2),$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ sont des fonctions rationnelles de x^2. L'intégrale prend alors la forme

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)}{y}\,dx + \int \frac{x\,\mathcal{R}_1(x^2)}{y}\,dx.$$

La deuxième intégrale devient une intégrale élémentaire par la substitution

$$x^2 = z.$$

Il reste donc à calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y}.$$

Si l'on ne s'astreint pas à n'introduire que des éléments réels, cette intégrale se ramène immédiatement à la forme normale de

Legendre. On a, en effet, en décomposant le polynome bicarré en facteurs,

$$y = \sqrt{A}\,\sqrt{(\alpha^2 - x^2)(\beta^2 - x^2)},$$

α et β pouvant être imaginaires. Si l'on fait ensuite

$$x = \alpha z,$$

on a

$$y = \alpha\beta\sqrt{A}\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}, \qquad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

et l'intégrale devient

$$I = \frac{1}{\beta\sqrt{A}}\int \frac{\mathcal{R}(\alpha^2 z^2)\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

elle est réduite à la forme normale de Legendre et on la calcule, comme dans le paragraphe précédent, en faisant

$$z = \operatorname{sn}(u, k).$$

Alors on a

$$x = \alpha z = \alpha \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha \operatorname{cn} u,$$

$$\sqrt{\beta^2 - x^2} = \beta\sqrt{1 - k^2 z^2} = \beta \operatorname{dn} u,$$

$$y = \alpha\beta\sqrt{A}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$I = \frac{1}{\beta\sqrt{A}}\int \mathcal{R}(\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)\,du.$$

164. Réduction à la forme normale en quantités réelles, dans le cas d'un polynome bicarré de la forme $A(x^2 + \alpha)(x^2 + \beta)$; A, α et β étant réels. — Supposons que l'on ait

$$y = \sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C},$$

A, B, C étant réels et $B^2 - AC$ positif : on peut alors écrire

$$y = \sqrt{A(x^2 + \alpha)(x^2 + \beta)},$$

α et β étant réels. Plusieurs cas sont à distinguer suivant les signes des quantités A, α et β. Comme on peut toujours, devant le radical, mettre $\sqrt{\pm A}$ en facteur, on a pour y les types suivants

où a et b désignent des quantités réelles :

(I) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)},$$

(II) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)},$$

(III) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + b^2)},$$

(IV) $$y = \sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 + b^2)},$$

(V) $$y = \sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Voici, pour chacun de ces types, une substitution réelle propre à ramener l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{y}\, dx$$

à la forme canonique de Legendre.

Type I. — Soit

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}, \qquad a^2 > b^2.$$

La quantité y devant être réelle, x^2 est extérieur à l'intervalle a^2, b^2. Deux cas sont à distinguer suivant que x^2 est inférieur à b^2 ou supérieur à a^2.

Premier cas : $x^2 < b^2$. — On fait $x = bz$; et l'on a

$$y = ab\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}, \qquad k^2 = \frac{b^2}{a^2} < 1.$$

Le radical est donc ramené à la forme demandée avec un module réel moindre que l'unité. Faisant ensuite

$$z = \operatorname{sn} u,$$

on a

$$x = b \operatorname{sn} u, \quad \sqrt{b^2 - x^2} = b \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{dn} u,$$

$$y = ab \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a}\int \mathfrak{R}(b^2 \operatorname{sn}^2 u)\, du.$$

Deuxième cas : $x^2 > a^2$. Posons

$$x = \frac{a}{z}, \qquad z^2 < 1,$$

nous avons

$$y = \frac{a^2}{z^2}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \qquad dx = -\frac{a}{z^2}\,dz, \qquad k^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le radical est encore ramené à la forme demandée, et en posant $z = \operatorname{sn} u$, on a

$$x = \frac{a}{\operatorname{sn} u}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a\,\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \sqrt{x^2 - b^2} = a\,\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$y = a^2\,\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{a}\int \mathcal{R}\left(\frac{a^2}{\operatorname{sn}^2 u}\right) du.$$

Type II. — Soit

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}, \qquad a^2 > b^2.$$

Pour que y soit réelle, il faut que x^2 soit compris entre b^2 et a^2. Il suffit de faire

$$a^2 - x^2 = x'^2, \qquad x'^2 < a^2 - b^2,$$

pour ramener l'intégrale

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}$$

à l'intégrale

$$-\int \frac{\mathcal{R}(a^2 - x'^2)\,dx'}{\sqrt{(a^2 - x'^2)(a^2 - b^2 - x'^2)}},$$

qui rentre dans le type I.

Type III. — L'intégrale

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + b^2)}}\,dx, \quad x^2 < a^2$$

se ramène de même au type I par la substitution

$$a^2 - x^2 = x'^2,$$

qui donne l'intégrale

$$-\int \frac{\mathcal{R}(a^2 - x'^2)}{\sqrt{(a^2 - x'^2)(a^2 + b^2 - x'^2)}}\,dx'.$$

Type IV. — L'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2+b^2)}}\,dx, \quad x^2 > a^2,$$

pouvant s'écrire

$$\frac{1}{ab}\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}\frac{dx}{x^2},$$

est du type III si l'on y considère $\frac{1}{x}$ comme la variable. On la ramènera donc au type I par la substitution

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2} = x'^2.$$

Type V. — Enfin l'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\,dx, \quad a^2 > b^2$$

se ramène également au type I par la substitution

$$x^2+a^2 = x'^2,$$

qui la transforme en

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x'^2-a^2)\,dx'}{\sqrt{(x'^2-a^2)(x'^2-a^2+b^2)}}, \quad x'^2 > a^2.$$

165. **Réduction à la forme canonique de Legendre en quantités réelles quand y est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré.** — Nous allons montrer que l'on peut toujours, par une substitution réelle, transformer un polynome du quatrième degré à coefficients réels en un polynome bicarré de la forme

$$A(x^2+\alpha)(x^2+\beta),$$

A, α et β étant réels. On sera alors ramené au cas précédent.

On sait qu'un polynome du quatrième degré, à coefficients réels, peut être décomposé, au moins d'une manière, en un produit de facteurs réels du second degré ; la décomposition exige, d'ailleurs, la résolution préalable d'une équation du troisième degré. Cette équation résolue, on peut écrire

$$y = \sqrt{C(x^2+2mx+n)(x^2+2\mu x+\nu)},$$

C, m, n, μ, ν étant réels, et, de plus, on peut toujours supposer $m \neq \mu$, sinon la transformation $x + m = x_1$ suffirait à réaliser le résultat cherché. Faisons $x = \frac{p + qt}{1 + t}$, t étant la nouvelle variable, p et q deux constantes. En substituant dans y et réduisant au même dénominateur, nous aurons sous le radical le produit de deux trinomes en t. Déterminons p et q de façon que ces trinomes ne contiennent pas de termes du premier degré en t: nous aurons les deux équations

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} pq + m(p + q) + n = 0, \\ pq + \mu(p + q) + \nu = 0, \end{cases}$$

qui donnent

$$p + q = \frac{n - \nu}{\mu - m}, \qquad pq = \frac{m\nu - n\mu}{\mu - m},$$

le dénominateur $\mu - m$ n'étant pas nul, en vertu de notre hypothèse.

Les quantités p et q sont donc racines d'une équation du second degré; pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que la quantité

$$\Delta = (n - \nu)^2 - 4(\mu - m)(m\nu - n\mu)$$

soit *positive*. Nous allons vérifier que, si le polynome du quatrième degré en x n'est décomposable que d'une façon en facteurs réels du second degré, Δ est *positif*; et que, si cette décomposition est possible de plusieurs façons, on peut toujours la faire de telle manière que Δ soit positif. En effet, appelons a, b, c, d les quatre racines de ce polynome, a et b étant les racines de $x^2 + 2mx + n$, c et d celles de $x^2 + 2\mu x + \nu$. On a

$$2m = -(a + b), \qquad n = ab, \qquad 2\mu = -(c + d), \qquad \nu = cd.$$

Substituant dans Δ, on trouve

$$\Delta = (a - c)(a - d)(b - c)(b - d).$$

Si a, b, c, d sont imaginaires, a et b sont conjugués, c et d aussi; Δ est positif.

Si a et b sont réels, c et d imaginaires conjugués, Δ est positif.

Si les quatre racines sont réelles, on peut décomposer le polynome du quatrième degré en x de trois façons différentes en deux

facteurs réels du second degré : supposons qu'on ait fait la décomposition de façon que $a > b > c > d$; alors Δ est positif.

Ainsi, dans tous les cas, après l'introduction de la nouvelle variable t, y prend la forme

$$y = \frac{\sqrt{A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}}{(1+t)^2} \qquad (A,\ \alpha,\ \beta \text{ étant réels});$$

et l'intégrale

$$\int \frac{S(x)}{y}\,dx$$

devient

$$(q-p)\int \frac{S\left(\dfrac{p+qt}{1+t}\right)}{\sqrt{A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}}\,dt.$$

On la ramènera à la forme canonique de Legendre par une des transformations indiquées dans le numéro précédent.

Remarque. — Si l'on considère x comme l'abscisse d'un point sur une droite, la détermination des valeurs de p et q revient à la recherche des abscisses des points qui divisent harmoniquement les deux couples de points ayant pour abscisses les racines des deux trinomes

$$x^2 + 2mx + n, \quad x^2 + 2\mu x + \nu.$$

166. Cas où le polynome sous le radical est du troisième degré. — Si l'on a une intégrale elliptique

$$\int \frac{S(x)\,dx}{y},$$

avec

$$y = \sqrt{ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d},$$

on peut encore, par une substitution réelle, ramener cette intégrale à la forme canonique de Legendre. Le polynome sous le radical ayant toujours une racine réelle α, il suffit de faire

$$x - \alpha = t^2,$$

pour être ramené à une intégrale dans laquelle figure la racine carrée d'un polynome *bicarré* en t.

Mais, dans ce cas, il est plus simple d'employer la forme normale de Weierstrass, comme on le verra dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

RÉDUCTION A LA FORME NORMALE DE WEIERSTRASS. INVERSION.

I. — Le polynome sous le radical est du troisième degré.

167. **Réduction à la forme normale.** — Soit à calculer l'intégrale $\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynome du troisième degré :

$$X = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \qquad (a \neq 0).$$

Si nous effectuons dans X la substitution

$$x = mz + n,$$

nous pourrons disposer des constantes m et n de façon que le polynome Z transformé de X soit de la forme

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

g_2 et g_3 désignant des coefficients constants. On reconnaît immédiatement qu'il suffit de poser

$$n = -\frac{b}{a}$$

et

$$am^3 = 4.$$

L'intégrale proposée se transforme alors en une intégrale telle que

$$I = \int \frac{S(z)\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$S(z)$ désignant une fonction rationnelle de z. On dit qu'*une intégrale de cette forme est de la forme canonique de Weierstrass.*

Si l'on pose ensuite

$$u = \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

on en tire, en faisant l'inversion,

$$z = p(u; g_2, g_3),$$

et l'intégrale elliptique I devient

$$I = \int S(pu)\,du,$$

$S(pu)$ étant une fonction rationnelle de pu. On calculera cette intégrale par la méthode de décomposition en éléments simples, comme on l'a expliqué au n° 50.

Les périodes de la fonction pu se calculent d'après les formules des Chapitres III ou VI.

168. Inversion de l'intégrale elliptique lorsque les invariants sont réels. — Nous avons vu, dès le début de cet Ouvrage, que, si l'on construit la fonction pu avec deux périodes arbitraires 2ω et $2\omega'$ de rapport imaginaire, cette fonction $z = pu$ vérifie une équation de la forme

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3, \tag{1}$$

g_2 et g_3 étant des constantes définies en fonction des périodes par certaines séries. Inversement, étant donnée une équation de cette forme où g_2 et g_3 ont des valeurs déterminées choisies arbitrairement, peut-on construire une fonction $p(u; g_2, g_3)$ vérifiant cette équation? Nous avons annoncé (n° 34) que la réponse est affirmative; nous allons le montrer actuellement dans l'hypothèse où les invariants g_2 et g_3 sont réels (et où le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ n'est pas nul). Nous verrons que, dans ce cas, on peut calculer une paire de périodes primitives de pu et nous vérifierons que la fonction pu, construite avec ces périodes, satisfait bien à l'équation (1).

Premier cas : *Discriminant positif.* — Supposons que, dans l'équation

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3, \tag{1}$$

g_2 et g_3 soient réels et que le discriminant du second membre $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ soit positif. Les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles.

Déterminons les valeurs ω et ω' par les égalités

$$(2) \qquad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$(3) \qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}},$$

de sorte que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont des quantités réelles et positives, et construisons la fonction pu qui admet pour périodes primitives 2ω, $2\omega'$.

Cette fonction pu satisfait à une équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - G_2 z - G_3,$$

dans laquelle G_2 et G_3 ont des valeurs réelles rendant le discriminant $G_2^3 - 27G_3^2$ positif. Il s'agit de démontrer que l'on a

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Pour cela, rappelons que les demi-périodes ω et ω' de la fonction pu peuvent se déduire des coefficients de l'équation différentielle vérifiée par cette fonction au moyen des égalités

$$\omega = \int_{E_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$

$$\frac{\omega'}{i} = \int_{-E_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}},$$

en désignant par E_1 la plus grande et par E_3 la plus petite des racines du polynome $4z^3 - G_2 z - G_3$. En comparant ces expressions de ω et de $\frac{\omega'}{i}$ aux intégrales (2) et (3) qui ont servi de définition à ces quantités, on est conduit aux égalités

$$\int_{e_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int_{E_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$

$$\int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}} = \int_{-E_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}}.$$

Mais, d'après le raisonnement fait aux nos 152 et 153, les égalités

précédentes exigent que l'on ait

$$E_1 = e_1, \qquad E_2 = e_2, \qquad E_3 = e_3$$

et, par suite,

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Donc l'équation différentielle donnée est vérifiée par la fonction pu qui admet pour périodes primitives 2ω et $2\omega'$, ω et $\frac{\omega'}{i}$ se déduisant des coefficients de l'équation donnée à l'aide des intégrales (2) et (3).

Deuxième cas : *Discriminant négatif.* — Étant donnée l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3;$$

dans laquelle g_2 et g_3 sont réels, et tels que l'on ait

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 < 0,$$

nous allons construire une fonction pu vérifiant cette équation différentielle.

Soient e_2 la racine réelle, e_1, e_3 les deux racines imaginaires conjuguées de $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$; posons

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$\frac{\omega_2'}{i} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}},$$

puis

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{2}, \qquad \omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_2'}{2};$$

et construisons la fonction pu qui admet pour périodes primitives $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Cette fonction pu satisfait à une équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - G_2 z - G_3;$$

les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ étant imaginaires conjuguées, on sait que G_2 et G_3 sont réels et que le polynome $4z^3 - G_2 z - G_3$ admet une

seule racine réelle : soient E_2 la racine réelle, E_1, E_3 les racines imaginaires conjuguées de ce polynome; de plus, on a

$$\omega_2 = \int_{E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$
$$\frac{\omega_2'}{i} = \int_{-E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}}.$$

Il s'agit de démontrer que G_2 et G_3 sont égaux respectivement à g_2 et g_3.

D'après ce qui précède, on doit avoir

$$\int_{e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} = \int_{E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z-E_1)(z-E_2)(z-E_3)}}$$

et

$$\int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z+e_1)(z+e_2)(z+e_3)}} = \int_{-E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z+E_1)(z+E_2)(z+E_3)}}.$$

Mais nous avons vu (nº 151) que ces égalités ne peuvent avoir lieu que si E_2, E_1, E_3 sont égaux respectivement à e_2, e_1, e_3, et, par suite, si l'on a

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Donc la fonction pu que nous avons construite avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ satisfait à l'équation différentielle donnée.

II — Le polynome sous le radical est du quatrième degré. Premier mode de réduction ou l'on ne se préoccupe pas de la réalité.

On a déjà donné nº 164 une méthode pour faire l'inversion de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$ en se servant des fonctions de Jacobi. Mais, pour appliquer cette méthode dans le cas général, il faut décomposer $F(z)$ en un produit de deux facteurs du second degré, ce qui conduit à résoudre une équation du troisième degré (nº 165). Il y a intérêt à éviter cette question auxiliaire, surtout lorsque le polynome du quatrième degré $F(z)$ n'a pas ses coefficients numériques et contient des constantes arbitraires, comme cela se présente

souvent dans les problèmes de Mécanique. Cette difficulté se trouve écartée quand on fait l'inversion en se servant des fonctions de Weierstrass.

169. **Cas particulier.** — Parmi les formes diverses que peut prendre la formule d'addition de la fonction pu, nous avons obtenu la suivante (n° 45) :

$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right).$$

Posons donc

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \tag{1}$$

et regardons v comme une constante et t comme une fonction de u; cette fonction vérifiera l'équation différentielle

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = [pu - p(u+v)]^2.$$

Nous allons exprimer le second membre en fonction de t et vérifier qu'il est un polynome du quatrième degré en t.

Dans tout ce qui suit nous rendrons les résultats plus faciles à retenir en employant une représentation géométrique.

Considérons la cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

décrite par le point de coordonnées

$$x = pu, \quad y = p'u,$$

cubique étudiée aux n^{os} 60 et suivants et 154. Coupons cette courbe par une sécante passant par un point fixe P de paramètre v et un point variable de paramètre u; le coefficient angulaire de la sécante est

$$a = \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = 2t,$$

et le troisième point d'intersection a pour paramètre $-(u+v)$ (n° 62). Nous avons obtenu dans le n° 62 des formules qu'on peut écrire, en y remplaçant a par $2t$,

$$[pu - pv] + [p(u+v) - pv] = t^2 - 3pv,$$
$$[pu - pv][p(u+v) - pv] = \frac{1}{2}(p''v - 2tp'v);$$

ces identités montrent que $pu - pv$ et $p(u+v) - pv$ sont racines d'une équation du second degré ayant pour coefficients des polynomes en t. En élevant la première au carré et en en retranchant le quadruple de la seconde, on a

$$[pu - p(u+v)]^2 = (t^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2tp'v),$$

et l'équation différentielle que vérifie t peut s'écrire

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = f(t),$$

en posant

$$f(t) = (t^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2tp'v).$$

Les racines de ce polynome $f(t)$ sont les moitiés des coefficients angulaires des tangentes menées du point P à la cubique; en effet, si t devient égal à une de ces racines, on a $pu = p(u+v)$, et la sécante de coefficient angulaire $2t$ coupe la cubique en deux points confondus.

En résumé, si t est défini en fonction de u par l'équation

$$du = \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

t peut s'exprimer en fonction uniforme doublement périodique de u par la formule (1) et il en est de même de $\sqrt{f(t)}$, qui est égale à $\frac{dt}{du}$. On exprime ce résultat en disant qu'*on a résolu le problème de l'inversion pour le polynome* $f(t)$. Ce polynome du quatrième degré en t ne renferme pas de terme en t^3 et contient trois constantes arbitraires, qui sont l'argument v et les deux invariants g_2 et g_3 de la fonction p.

Nous allons voir que, si le polynome sous le radical est un polynome du quatrième degré quelconque, on peut toujours, après en avoir fait disparaître le terme en t^3, l'identifier avec $f(t)$, et, cela, par des opérations *rationnelles*. Le cas particulier que nous venons de traiter nous donnera donc la solution du problème de l'inversion pour un polynome du quatrième degré quelconque.

170. Le cas général ramené au cas particulier précédent. — Soit un polynome donné du quatrième degré

$$\varphi(t) = t^4 + 6\alpha_2 t^2 + 4\alpha_3 t + \alpha_4,$$

débarrassé du terme en t^3. En l'identifiant avec le polynome $f(t)$ du numéro précédent, on trouve, en vertu de $2\,p''v = 12\,p^2 v - g_2$,

$$p\,v = -\alpha_2, \qquad p'v = \alpha_3, \qquad g_2 - 3\,p^2 v = \alpha_4.$$

La dernière de ces égalités peut être remplacée par la suivante :

$$g_2 = \alpha_4 + 3\,\alpha_2^2,$$

et l'on voit que les trois constantes $p\,v$, $p'v$ et g_2 se trouvent déterminées. La valeur de g_3 peut se déduire de l'équation

$$p'^2 v = 4\,p^3 v - g_2\,p\,v - g_3;$$

elle est égale à

$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3.$$

On a donc, pour identifier les deux polynomes, les relations concordantes

$$g_2 = \alpha_4 + 3\,\alpha_2^2, \qquad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3,$$
$$p\,v = -\alpha_2, \qquad p'v = \alpha_3.$$

Ces relations définissent les deux invariants g_2 et g_3 et l'argument constant v.

Si le polynome donné est un polynome $F(z)$ renfermant un terme du troisième degré

$$F(z) = a_0 z^4 + 4\,a_1 z^3 + 6\,a_2 z^2 + 4\,a_3 z + a_4,$$

on fera disparaître le second terme en posant

$$z = t - \frac{a_1}{a_0};$$

on a alors

$$F(z) = a_0(t^4 + 6\,\alpha_2 t^2 + 4\,\alpha_3 t + \alpha_4) = a_0\,\varphi(t),$$

où

$$\alpha_2 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{a_3 a_0^2 - 3\,a_0 a_1 a_2 + 2\,a_1^3}{a_0^3},$$
$$\alpha_4 = \frac{a_4 a_0^3 - 4\,a_0^2 a_1 a_3 + 6\,a_0 a_2 a_1^2 - 3\,a_1^4}{a_0^4}.$$

On trouve enfin, pour g_2 et g_3, les expressions suivantes :

$$g_2 = \alpha_4 + 3\,\alpha_2^2 = \frac{S}{a_0^2},$$
$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3 = \frac{T}{a_0^3},$$

en posant

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Remarque. — S et T sont les *invariants* du polynome

$$a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4.$$

Si l'on calcule les valeurs particulières de S et de T pour le polynome

$$f(t) = t^4 - 6 t^2 p v + 4 t p' v + g_2 - 3 p^2 v,$$

on trouve g_2 et g_3.

On obtiendrait donc immédiatement les relations donnant g_2 et g_3 en égalant les valeurs des invariants des deux polynomes que l'on veut identifier.

Les expressions de pv et de $p'v$ en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 s'obtiennent de même en remplaçant $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ par leurs valeurs ; on peut alors énoncer la règle suivante :

171. Règle. — Soit $F(z)$ un polynome du quatrième degré quelconque

$$F(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4,$$

et soient S et T les fonctions suivantes des coefficients de ce polynome :

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Si l'on prend les fonctions elliptiques ayant pour invariants

$$g_2 = \frac{S}{a_0^2}, \quad g_3 = \frac{T}{a_0^3},$$

et un argument constant v défini par les égalités

$$p v = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \qquad p' v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a^3}{a_0^3},$$

et si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p' u - p' v}{p u - p v},$$

on a

$$\sqrt{F(z)} = \sqrt{a_0}\,[p u - p(u + v)],$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}}du = \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}, \qquad \frac{u}{\sqrt{a_0}} = \int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}},$$

ce qui donne la solution du problème de l'inversion pour le polynome du quatrième degré $F(z)$.

A un point de vue géométrique, ces formules peuvent aussi s'interpréter comme il suit :

Si l'on considère la courbe du quatrième ordre

$$Z = \sqrt{F(z)},$$

les coordonnées Z et z d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer en fonctions uniformes du paramètre u par les formules

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$Z = \sqrt{a_0}[pu - p(u+v)].$$

III. — Inversion en quantités réelles. Discriminant positif.

172. Expression elliptique des racines d'un polynome du quatrième degré. — D'après ce qui précède, étant donné un polynome du quatrième degré

$$F(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4,$$

si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

les invariants des fonctions elliptiques et l'argument constant v étant convenablement choisis, le polynome $F(z)$ prend la forme

$$F(z) = a_0[pu - p(u+v)]^2.$$

Cette forme permet de trouver simplement les valeurs de l'argument u qui correspondent aux racines de $F(z)$. Pour l'une de ces valeurs, on doit avoir

$$pu - p(u+v) = 0,$$

ou bien

$$u + v = \pm u + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers. On ne doit pas prendre le

signe +, puisque v n'est pas un multiple des périodes. En prenant le signe —, on trouve

$$u = -\frac{v}{2} + m\omega + n\omega',$$

et il suffit de considérer les quatre valeurs suivantes de u

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \quad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega, \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega + \omega', \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega'.$$

173. **Discussion relative à la réalité des racines. Cas où le discriminant est positif.** — Nous supposerons dans ce qui suit que les coefficients de $F(z)$ sont réels, de sorte que, lorsqu'on fait l'inversion, g_2 et g_3 sont réels. De plus, nous nous limitons pour le moment au cas où le discriminant est positif. La courbe

$$x = pu, \quad y = p'u$$

se compose d'un ovale et d'une branche infinie. Les valeurs de pv et $p'v$ étant réelles, v est le paramètre d'un point réel de la courbe. L'une des périodes ω est réelle, l'autre ω' purement imaginaire.

Les arguments u_0, u_1, u_2, u_3 sont les paramètres des points de contact des tangentes menées à la cubique $x = pu$, $y = p'u$ par le point de paramètre v; les valeurs correspondantes de

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

sont les demi-coefficients angulaires des quatre tangentes, et l'on voit, en se reportant à l'expression de z en fonction de u, que le nombre des racines réelles de $F(z)$ est égal au nombre des tangentes réelles qu'on peut mener à la cubique par le point de paramètre v.

Nous avons vu (n° 65) que les quatre tangentes sont ou toutes réelles, ou toutes imaginaires suivant que le point v appartient à la branche infinie ou à l'ovale, c'est-à-dire (n° 65) suivant qu'on a à la fois

$$pv > 0, \quad p''v > 0,$$

ou que l'une au moins de ces inégalités n'est pas vérifiée.

D'après la valeur de pv en fonction des coefficients du polynome, on peut énoncer ce résultat ainsi :

Dans le cas du discriminant positif, le polynome $F(z)$ *a ses quatre racines réelles, si l'on a à la fois*

$$a_1^2 - a_0 a_2 > 0, \qquad 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - S a_0^2 > 0.$$

Si l'une de ces inégalités n'est pas vérifiée, le polynome a ses quatre racines imaginaires.

Les quatre racines rangées par ordre de grandeur. — Désignons par

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3$$

les valeurs de z et par

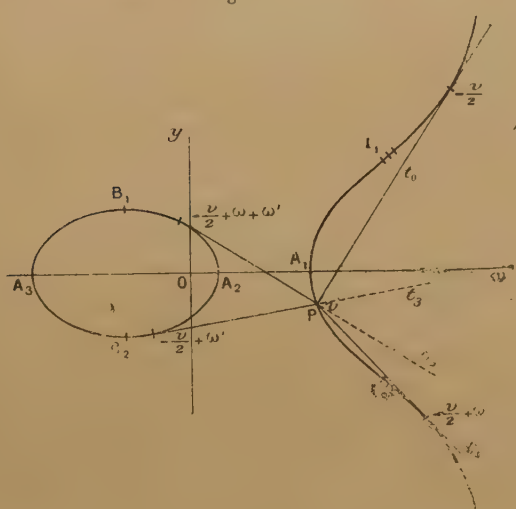
$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3$$

les valeurs de t qui correspondent aux arguments

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3.$$

Dans le cas où les quatre racines sont réelles, les quatre valeurs

Fig. 5 *bis*.



de z sont rangées dans le même ordre que les valeurs correspondantes de t.

Or on peut voir sur la figure (*fig.* 5 *bis*) dans quel ordre sont

rangés les coefficients angulaires des quatre tangentes menées du point P de paramètre v, en remarquant que chacune de ces tangentes n'a d'autre point sur la courbe que le point P et son point de contact. En supposant

$$0 < v < \omega,$$

on voit (*fig.* 5 *bis*) que les valeurs de t sont rangées dans l'ordre suivant :

$$t_0 > t_3 > t_2 > t_1,$$

et, par suite, on a

$$z_0 > z_3 > z_2 > z_1.$$

174. Inversion en quantités réelles. — Supposons que l'on ait fait l'inversion de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}},$$

par la méthode des nos 170 et 171. Cherchons quelles valeurs de u l'on doit prendre pour que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux.

1° *Cas où les quatre racines sont imaginaires.* — Alors $F(z)$ est toujours du signe de a_0. Si donc a_0 est négatif, $\sqrt{F(z)}$ n'est jamais réel en même temps que z. Si a_0 est positif, il suffit que z soit réel pour que $\sqrt{F(z)}$ le soit, c'est-à-dire que

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

soit réel. Or, puisque les quatre racines sont imaginaires, le point P, de paramètre v, appartient à l'ovale. Si nous menons par ce point P une sécante de coefficient angulaire $2t$, cette sécante rencontre toujours, quel que soit t, la courbe en un autre point appartenant à l'ovale et en un point appartenant à la branche infinie. En d'autres termes, à une valeur réelle de t correspondent pour u une valeur réelle et une valeur de la forme $a + \omega'$, a étant réel.

Ainsi, quand les quatre racines sont imaginaires, il n'y a de solution que si a_0 est positif; on doit prendre alors u réel ou $u - \omega'$ réel.

2° *Cas où les quatre racines sont réelles.* — Le point de paramètre v est alors sur la branche infinie de la cubique, comme dans la figure 5 *bis*.

L'argument v peut alors être supposé réel et compris entre $-\omega$ et ω (n° 65).

Nous ferons la discussion en supposant

$$0 < v < \omega,$$

ce qui est d'accord avec la figure, et nous écrirons

$$F(z) = a_0(z - z_0)(z - z_3)(z - z_2)(z - z_1),$$

les racines se succédant dans le produit suivant l'ordre de grandeur décroissante.

Soit d'abord $a_0 > 0$. Comme z est supposé réel, pour que $\sqrt{F(z)}$ le soit, il faut que z vérifie l'une des inégalités suivantes :

$$z > z_0, \qquad z_3 > z > z_2, \qquad z < z_1,$$

ou bien que t vérifie l'une des suivantes :

$$t > t_0, \qquad t_3 > t > t_2, \qquad t < t_1.$$

Or le point P se trouve maintenant sur la branche infinie. Si nous menons par P une sécante de coefficient angulaire t et si l'on a

$$t > t_0 \quad \text{ou} \quad t < t_1,$$

les deux points variables d'intersection appartiennent à la branche infinie : les valeurs correspondantes de u sont réelles. Si l'on a

$$t_3 > t > t_2,$$

les deux points variables d'intersection appartiennent à l'ovale et, pour chacun d'eux, $u - \omega'$ est réel. *Ainsi, quand a_0 est positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel.*

Soit maintenant $a_0 < 0$, on doit avoir

$$t_0 > t > t_3 \quad \text{ou} \quad t_2 > t > t_1.$$

Si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée, la sécante menée par P et dont le coefficient angulaire est $2t$ ne rencontre plus

la courbe, les abscisses des deux points variables d'intersection

$$pu, \quad p(u+v)$$

doivent être imaginaires conjuguées. Or, si nous posons $u = a + bi$, a et b étant réels, la formule d'addition montre que $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont imaginaires conjugués; il faut donc que l'on ait

$$p(v+a+bi) = p(a-bi)$$

ou bien

$$v+a+bi = \pm(a-bi) + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers. On ne peut pas prendre le signe $+$, car, en égalant les parties réelles, on trouverait

$$v = 2m\omega,$$

ce qui n'a pas lieu; on doit donc prendre le signe $-$ et l'on a, par suite,

$$v + 2a = 2m\omega + 2n\omega';$$

n doit être nul, puisque v et a sont supposés réels, et l'égalité peut s'écrire

$$a = -\frac{v}{2} + m\omega,$$

où il suffit de considérer pour m les valeurs 0 et 1.

Nous trouvons donc, comme condition nécessaire, que u doit être de l'une des formes suivantes :

$$u = -\frac{v}{2} + ib, \qquad u = -\frac{v}{2} + \omega + ib,$$

b étant réel. Nous allons vérifier que cette condition est suffisante.

On voit d'abord que, si u a l'une des formes précédentes, t est réel. En effet, d'après l'interprétation géométrique de t, on a comme demi-coefficient angulaire de la sécante

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1}, \qquad u_1 = -(u-v).$$

Si

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + ib\right) = -\frac{v}{2} - ib;$$

u et u_1 sont imaginaires conjugués; il en est de même de pu et de pu_1, puis de $p'u$ et de $p'u_1$: donc t est réel. Si

$$u = -\frac{v}{2} + \omega + ib,$$

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + \omega + ib\right),$$

$$u_1 + 2\omega = -\frac{v}{2} + \omega - ib.$$

Donc pu et pu_1 d'une part, $p'u$ et $p'u_1$ d'autre part, sont imaginaires conjugués, t est encore réel. Dans les deux cas, la sécante de coefficient angulaire $2t$, menée par P, rencontre la cubique en deux points imaginaires. Il faut donc que l'on ait

$$t_0 > t > t_3 \quad \text{ou} \quad t_2 > t > t_1.$$

Donc enfin, pour une valeur de u de l'une des deux formes considérées, z et $\sqrt{F(z)}$ sont réels tous les deux.

Ainsi, dans le cas où les quatre racines sont réelles et où a_0 est négatif, on doit prendre $u + \frac{v}{2}$ ou bien $u + \frac{v}{2} - \omega$ purement imaginaire.

La démonstration a été faite en supposant $0 < v < \omega$. Le résultat est encore vrai si v est compris entre 0 et $-\omega$.

175. **Résumé.** — Le discriminant étant positif, si l'on veut que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux, il faudra choisir la forme de l'argument u par la règle suivante :

1° *Les quatre racines de* $F(z)$ *sont imaginaires.* — Si a_0 est positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel; si a_0 est négatif, il n'y a pas de solution.

2° *Les quatre racines de* $F(z)$ *sont réelles.* — Si a_0 est positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel. Si a_0 est négatif, on doit prendre $u + \frac{v}{2}$ ou bien $u + \frac{v}{2} - \omega$ purement imaginaire.

Ces cas 1° et 2° sont les seuls qui peuvent se présenter quand le discriminant est positif.

IV. — Inversion en quantités réelles. Discriminant négatif.

176. **Racines de $F(z)$.** — Soit, comme précédemment, le polynome du quatrième degré à coefficients réels

$$F(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4.$$

Les quantités g_2 et g_3 étant calculées comme plus haut en fonction des coefficients de ce polynome, nous supposons maintenant le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ *négatif*.

Nous désignerons, comme au n° 144, par ω_1 et ω_3 un couple de périodes primitives de la fonction p, périodes que l'on peut supposer actuellement *imaginaires* conjuguées

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega_2', \quad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega_2',$$

ω_2 désignant une quantité réelle et ω_2' une quantité purement imaginaire.

On voit immédiatement, comme au n° 172, que, si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

les invariants de la fonction p et l'argument constant v étant convenablement choisis, les racines du polynome $F(z)$ correspondent aux arguments

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \quad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1, \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_1 + \omega_3, \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3.$$

Nous supposons que les coefficients de $F(z)$ sont réels; alors les quantités qui ont servi à définir pv et $p'v$ sont réelles, et l'on peut toujours supposer (n° 148) v réel et compris entre $-\omega_2$ et ω_2.

On voit donc que $F(z)$ a deux racines réelles correspondant aux arguments

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_2,$$

et deux racines imaginaires conjuguées correspondant aux arguments

$$u_1 = \frac{-v + \omega_2 - \omega_2'}{2}, \quad u_3 = \frac{-v + \omega_2 + \omega_2'}{2}.$$

Si l'on considère la courbe

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

précédemment étudiée (n° 154), on sait que cette courbe n'a pas de points réels en dehors de la branche infinie représentée sur la figure 31. Le point P de paramètre v est un point de cette branche.

Par ce point on peut mener à la courbe deux tangentes réelles. Les demi-coefficients angulaires de ces tangentes sont les valeurs que prend le rapport

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

pour $u = u_0$ et $u = u_2$, valeurs que nous désignerons par t_0 et t_2.

Dans la discussion qui va suivre nous supposerons

$$0 < v < \omega_2;$$

on voit alors sur la figure 31 que l'on a

$$t_0 > t_2$$

et l'on en conclut

$$z_0 > z_2.$$

177. **Inversion en quantités réelles.** — Cherchons quelles valeurs de u il faut prendre pour que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux. Comme on a

$$F(z) = a_0(z - z_0)(z - z_2)(z - z_1)(z - z_3),$$

et que z_1 et z_3 sont imaginaires conjugués, il suffit, si z est déjà réel, que l'on ait

$$a_0(z - z_0)(z - z_2) > 0.$$

1° Supposons d'abord que a_0 est positif : il faut que z vérifie l'une des inégalités

$$z > z_0 \quad \text{ou} \quad z < z_2$$

et par suite que t vérifie l'une des inégalités

$$t > t_0 \quad \text{ou} \quad t > t_2;$$

une sécante, menée par P et dont le coefficient angulaire est égal à $2t$, rencontre alors la courbe en deux points réels.

Donc *si a_0 est positif, on doit prendre u réel.*

2° Supposons maintenant que a_0 est négatif; t doit vérifier la double inégalité

$$t_2 < t < t_0;$$

la sécante, menée par P et dont le coefficient angulaire est égal à $2t$, ne rencontre plus la courbe. Les abscisses des points variables d'intersection

$$pu, \quad p(u+v)$$

doivent être imaginaires conjuguées. C'est cette condition qui, dans le cas actuel, va nous déterminer la forme de u.

Posons $u = a + bi$; a et b étant réels, $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont des quantités imaginaires conjuguées : on le vérifie à l'aide de la formule d'addition. On doit donc avoir

$$p(v + a + bi) = p(a - bi)$$

et, par suite,

$$v + a + bi = \pm (a - bi) + 2m\omega_1 + 2n\omega_3.$$

Prenons d'abord le signe +; l'égalité devient

$$\begin{aligned} 2a + v &= 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \\ &= m(\omega_2 - \omega'_2) + n(\omega_2 + \omega'_2). \end{aligned}$$

Comme a et v sont réels, on doit avoir $n = m$, et l'égalité résolue par rapport à a devient

$$a = -\frac{v}{2} + m\omega_2;$$

il suffit de donner à m les valeurs 0 et 1. Pour $m = 0$, $u + \frac{v}{2}$ est purement imaginaire. Pour $m = 1$, $u + \frac{v}{2}$ est égal à une quantité purement imaginaire augmentée de ω_2. Mais ce cas rentre dans le précédent si l'on remarque que (n° 147)

$$p(\omega_2 + u) = p(\omega'_2 + u).$$

Réciproquement il est facile de vérifier que, pour un argument u de la forme

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

où b désigne un nombre réel, t est réel et compris entre t_0 et t_2. En effet, puisque $2t$ est le coefficient angulaire de la sécante allant du point P dont le paramètre est v au point dont le paramètre est u, on a

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1}, \qquad u_1 = -(u+v).$$

Si l'on prend

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

on a

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + ib\right) = -\frac{v}{2} - ib,$$

et l'on voit que pu et pu_1 d'une part, $p'u$ et $p'u_1$ d'autre part, sont des quantités imaginaires conjuguées. Donc t est réel. De plus, la sécante menée par P et de coefficient angulaire $2t$, rencontrant encore la courbe en deux points dont les abscisses sont des quantités imaginaires, t est nécessairement compris entre t_0 et t_2. Donc à une valeur de u de la forme considérée correspondent des valeurs réelles de z et de $\sqrt{F(z)}$.

Nous avons choisi le signe — dans l'égalité exprimant que pu et $p(u+v)$ sont imaginaires conjuguées. En choisissant le signe $+$ dans la même égalité, on serait conduit à des arguments pour lesquels pu et $p(u+v)$ seraient bien encore des quantités imaginaires conjuguées, mais ne rendant pas réels z et $\sqrt{F(z)}$.

Ainsi, quand a_0 est négatif, il faut prendre $u + \frac{v}{2}$ purement imaginaire.

178. **Résumé.** — Le discriminant étant négatif, $F(z)$ *a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées;* si l'on veut que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux, il faudra choisir la forme de l'argument u par la règle suivante :

Quand a_0 est positif, on doit prendre u réel;

Quand a_0 est négatif, on doit prendre $u + \frac{v}{2}$ purement imaginaire.

V. — Méthode d'Hermite.

179. **Méthode générale.** — Hermite a donné le moyen de ramener à la forme canonique adoptée par Weierstrass une in-

tégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ dans laquelle X désigne un polynome général du quatrième degré. Nous ne ferons qu'indiquer, à titre d'exercice, cette méthode dont nous n'aurons pas à faire usage. Soient

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

un polynome et H le hessien de ce polynome,

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + a_2 a_4 - a_3^2.$$

Si l'on pose

$$\xi = -\frac{H}{X},$$

on aura

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - S\xi - T}},$$

S et T désignant les invariants du polynome X

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$
$$T = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Pour s'en assurer, il suffit de substituer ξ dans l'intégrale du deuxième membre et d'admettre l'identité suivante, facile à vérifier quand le polynome X est bicarré,

$$X^3\left[4\left(-\frac{H}{X}\right)^3 - S\left(-\frac{H}{X}\right) - T\right] = 4J^2,$$

en désignant par $4J$ le jacobien des polynomes X et H

$$4J = X\frac{\partial H}{\partial x} - H\frac{\partial X}{\partial x}.$$

D'ailleurs, l'identité précédente, une fois établie pour un polynome X bicarré, s'étend aisément au cas d'un polynome général du quatrième degré.

Cas particulier. — Ainsi on vérifiera aisément que l'on a

$$4\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6mx^2 + 1}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + m)\left(\xi - \frac{m-1}{2}\right)\left(\xi - \frac{m+1}{2}\right)}},$$

en posant

$$\xi = -\frac{m(x^4+1)+(1-3m^2)x^2}{x^4+6mx^2+1} = -\frac{H}{X}.$$

Cela résulte des identités

$$(H - mX)\left(H + \frac{m-1}{2}X\right)\left(H + \frac{m+1}{2}X\right)$$
$$= -\frac{(9m^2-1)^2}{4}[x(x^2+1)(x^2-1)]^2,$$

$$\frac{1}{4}\left(X\frac{\partial H}{\partial x} - H\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{9m^2-1}{2}x(x^2+1)(x^2-1).$$

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS DIVERSES TRAITÉES AVEC LA NOTATION DE WEIERSTRASS.

I. — Courbe élastique plane et sans pression.

180. Mise en équations. — Nous avons déjà traité cette question au n° 130 à l'aide des fonctions de Jacobi; nous allons la reprendre en nous servant des fonctions de Weierstrass et nous en préparerons l'application au cas du prisme droit chargé debout. On pourra, de cette façon, comparer les deux systèmes de notations en les appliquant à un même exemple.

L'équation qui donne la forme de la courbe élastique dans la position d'équilibre contraint et qui a été obtenue au n° 130 peut s'écrire avec un changement de notation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

C désignant un coefficient positif et a la mesure d'une longueur que nous laisserons arbitraire. Ces constantes sont liées à la constante c employée au n° 130 par la relation

$$\frac{2C}{a^2} = \frac{1}{c^2}.$$

On trouvera à la page suivante, un Tableau de formules que l'on passera à une première lecture : ce Tableau donne le résumé des formules établies dans ce paragraphe.

Tableau de formules. (*Courbe élastique plane et sans pression.*)

(1) $$\frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

(2) $$\frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D,$$

(3) $$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2,$$

(4) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_2},$$

(5) $$(pu - e_2)[p(u + \omega_2) - e_2] = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2),$$

(6) $$(pu - e_2) + [p(u + \omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2,$$

(7) $$\left(\frac{y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = [p(u + \omega_2) - pu]^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

(8) $$\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{D}{C}\right)^2 - \frac{1}{C^2} = -\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

(9) $$a\,du = Ci\,ds,$$

(10) et (11) $$\frac{i}{a}\,\frac{dx}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 = pu + p(u + \omega_2) - 2e_2,$$

(12) $$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u + \omega_2) + 2ue_2] + \text{const.},$$

(13) $$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

(14) $$a\,dt = C\,ds,$$

(15) $$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2t,$$

(16) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\omega_2},$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{pit - p\frac{\omega_2}{2}}.$$

181. Intégration par les fonctions elliptiques. — La relation (1) peut être considérée comme une équation différentielle du second ordre de la courbe. Nous allons intégrer cette équation. En dési-

gnant par s l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe et par θ l'angle de Ox avec la tangente supposée menée dans le sens qui correspond aux arcs croissants (*fig.* 16, p. 203), on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = -\sin\theta.$$

De la première égalité l'on déduit, par différentiation,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

puis, en remplaçant $\sin\theta$ et $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2\frac{C}{a^2}y\frac{dy}{ds}.$$

Intégrons, ce qui donne

$$\frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D, \tag{2}$$

D désignant une nouvelle constante, et portons l'expression ainsi obtenue de $\frac{dx}{ds}$ dans la relation

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

il vient

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2. \tag{3}$$

182. Inversion. — En remarquant que le polynome du quatrième degré dont on veut faire l'inversion est bicarré, on est conduit à appliquer de la façon suivante la méthode donnée au n° 169.

Posons, en adoptant les notations du Chapitre VI, § I,

$$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_2}; \tag{4}$$

on sait que l'on a

$$(pu - e_2)[p(u+\omega_2) - e_2] = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \tag{5}$$

$$(pu - e_2) + [p(u+\omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 \tag{6}$$

et, par suite, d'après (66) (p. 54),

$$\left(\frac{y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = [p(u+\omega_2) - pu]^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2. \tag{7}$$

Pour identifier le polynome du quatrième degré qui forme le premier membre de cette égalité avec le second membre de l'égalité (3), nous mettrons cette égalité (3) sous la forme

$$(8)\qquad \left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{D}{C}\right)^2-\frac{1}{C^2}=-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

et il nous suffira ensuite de poser

$$\frac{1}{C^2}=4(e_2-e_1)(e_2-e_3),$$

$$\frac{D}{C}=-3e_2=e_1-e_2+e_3-e_2.$$

On voit que e_1-e_2 et e_3-e_2 sont les racines d'une équation du second degré dont le discriminant est

$$\frac{1}{C^2}(D^2-1).$$

Nous nous bornerons dans tout ce qui suit au cas de $D^2<1$. On reconnaît aisément que cette inégalité doit être vérifiée si la courbe présente un point d'inflexion, comme cela a lieu pour le prisme droit chargé debout : en effet, pour que ρ puisse devenir infini, il faut que y puisse s'annuler sans que $\frac{dy}{ds}$ devienne imaginaire ; il faut donc, d'après (8), que D^2-1 soit négatif. Cette hypothèse correspond au premier cas du n° 130. Alors e_2 étant réel, e_1 et e_3 sont imaginaires conjugués ; on peut prendre, comme périodes primitives de la fonction pu, deux quantités imaginaires conjuguées : nous les désignons par ω_1 et ω_3 et nous conservons les notations du paragraphe I, Chapitre VI.

Ayant ainsi identifié les premiers membres des égalités (7) et (8), nous avons

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2=-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

et, par suite,

$$(9)\qquad a\,du=Ci\,ds,$$

en supposant convenablement choisi le sens dans lequel l'arc s est compté.

Dans l'égalité (2) remplaçons ds par $\frac{a}{Ci}du$ et $\frac{D}{C}$ par sa

valeur $-3e_2$, il vient

(10) $$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2$$

et, en tenant compte de la relation (6),

(11) $$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = pu + p(u+\omega_2) - 2e_2.$$

On a immédiatement l'intégrale du second membre et l'on trouve

(12) $$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u+\omega_2) + 2ue_2] + \text{const.}$$

183. Nature de l'argument. — Voyons comment doit varier u pour que y et $\sqrt{1-\left(C\frac{y^2}{a^2}+D\right)^2}$ soient tous les deux réels.

La relation déjà établie

$$a\,du = Ci\,ds$$

montre que u et du sont nécessairement imaginaires. Posons

$$u = h + it,$$

h et t désignant des quantités réelles, dont la seconde est variable.

On a trouvé, en faisant l'inversion,

$$1-\left(C\frac{y^2}{a^2}+D\right)^2 = -\frac{C^2}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = -C^2[pu - p(u+\omega_2)]^2,$$

et il en résulte

$$\sqrt{1-\left(C\frac{y^2}{d^2}+D\right)^2} = iC[p(h+it) - p(\omega_2+h+it)].$$

D'après cela, $p(\omega_2+h+it)$ doit être la quantité imaginaire conjuguée de $p(h+it)$; on doit donc avoir

$$p(\omega_2+h+it) = p(h-it)$$

et, par suite,

$$\omega_2 + h + it = \pm(h-it) + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m et n désignant des nombres entiers. Si l'on prenait le signe $+$, h disparaîtrait et t ne pourrait varier d'une manière continue. En prenant le signe $-$, l'égalité devient

$$2h + \omega_2 = m(\omega_2 - \omega_2') + n(\omega_2 + \omega_2');$$

le premier membre étant réel, il faut que $n = m$ et l'on trouve alors

$$h = -\frac{\omega_2}{2} + m\omega_2.$$

Il suffit de donner à m les valeurs o et 1. Pour $m = 0$, $u + \frac{\omega_2}{2}$ est purement imaginaire. Pour $m = 1$, $u + \frac{\omega_2}{2}$ n'est plus purement imaginaire; mais ce cas se ramène au précédent, à cause de la formule

$$p(u + \omega_2) = p(u + \omega_2').$$

En résumé, on aura donc à prendre pour u des valeurs de la forme

(13) $$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

t étant une variable réelle.

Remarquons tout de suite que l'égalité

$$a\,du = \mathrm{C}i\,ds$$

devient

(14) $$a\,dt = \mathrm{C}\,ds.$$

184. **Expressions de x et de y.** — Remplaçons u par sa valeur en fonction de t dans les relations (12) et (4); il vient

(15) $$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2 t,$$

en supposant l'axe des y choisi de façon que $x = 0$ pour $t = 0$, puis

(16) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\,\omega_2}.$$

Cette valeur de y peut s'écrire successivement en se servant des relations (65) et (64) du n° 44

$$\frac{y}{a} = \zeta\left(it - \frac{\omega_2}{2}\right) - \zeta\left(it + \frac{\omega_2}{2}\right) + \mathrm{A},$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{p\,it - p\frac{\omega_2}{2}},$$

A, y_0 désignant des constantes et y_0 étant la valeur que prend y pour $t = 0$.

185. **Intervalle dans lequel il suffit de faire varier t.** — En tenant compte de la périodicité des fonctions de t qui figurent dans les expressions de x et de y, cherchons dans quel intervalle il suffit de faire varier la variable réelle t.

Quand on change t en $t + \frac{2\omega'_2}{i}$, y ne change pas, x augmente de la quantité constante $4h$ définie par l'égalité

$$(18) \qquad \frac{h}{a} = i(\eta'_2 + e_2\omega'_2) = i(\eta_3 - \eta_1 + e_2\omega'_2),$$

où l'on a posé

$$\eta_1 = \zeta\omega_1, \qquad \eta_3 = \zeta\omega_3.$$

Il suffit de faire varier t de t_0 à $t_0 + \frac{2\omega'_2}{i}$. Si l'on change t en $-t$, y ne change pas, x change de signe. Donc si l'on faisait varier t de $-\frac{\omega'_2}{i}$ à $+\frac{\omega'_2}{i}$, la branche de courbe ainsi obtenue serait symétrique par rapport à Oy; il suffit de faire varier t de 0 à $\frac{\omega'_2}{i}$.

On peut encore restreindre cet intervalle; soient t_1 et t_2 deux valeurs de t ayant pour demi-somme $\frac{\omega'_2}{2i}$:

$$t_1 = \frac{\omega'_2}{2i} + \tau, \qquad t_2 = \frac{\omega'_2}{2i} - \tau;$$

soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points correspondants; on a

$$y_1 + y_2 = 0, \qquad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = h,$$

h étant la constante définie par l'égalité (18). Donc, si l'on faisait varier t de 0 à $\frac{\omega'_2}{2i}$, la branche de courbe ainsi obtenue aurait pour centre le point $y = 0$, $x = h$: il suffit de faire varier t de 0 à $\frac{\omega'_2}{2i}$.

Considérons les points de la courbe qui correspondent aux valeurs extrêmes de cet intervalle $\left(0, \frac{\omega'_2}{2i}\right)$. Pour $t = \frac{\omega'_2}{2i}$, on a $y = 0$

d'après la formule (16) et

$$\frac{x}{a} = i(\zeta\omega_3 - \zeta\omega_1 + \omega'_2 e_2) = \frac{h}{a}$$

d'après la formule (15). Ce point $y = 0$, $x = h$ est le centre dont nous venons de constater l'existence. Ce point est en même temps un point d'inflexion, comme cela résulte de la formule

$$\frac{1}{\rho} = 2\frac{Cy}{a^2}.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$ et $y = y_0$. Cherchons la tangente au point correspondant de la courbe. Faisons dans (4) $u = -\frac{\omega_2}{2} + it$ et dérivons par rapport à t la relation obtenue; si l'on tient compte de la formule (66) du n° 45 (où l'on aura fait $v = \omega_2$), on obtiendra

$$(19)\qquad \frac{1}{a}\frac{dy}{dt} = i\left[p\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right];$$

de même, en faisant dans (11) $u = -\frac{\omega_2}{2} + it$, on aura

$$(20)\qquad \frac{1}{a}\frac{dx}{dt} = p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) + p\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - 2e_2 = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2.$$

On voit que, pour $t = 0$, $\frac{dy}{dt}$ est nul et $\frac{dx}{dt}$ est égal à $2\left(p\frac{\omega_2}{2} - p\omega_2\right)$, quantité plus grande que zéro. Donc la tangente est parallèle à Ox, c'est-à-dire à la direction de la force élastique; de plus, comme Oy est un axe de symétrie, le point correspondant à $t = 0$ est un sommet.

186. Construction de la courbe. — Supposons maintenant que t croît de 0 à $\frac{\omega'_2}{2i}$. A cause de l'égalité

$$C\,ds = a\,dt,$$

s va constamment en croissant. L'égalité

$$\frac{y - y_0}{a} = \frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{pit - p\frac{\omega_2}{2}}$$

montre que y va sans cesse en décroissant; nous avons déjà remarqué que y part de y_0 pour arriver à zéro; il en résulte que y_0 est positif et que la valeur absolue de y décroît constamment.

Pour voir comment varie x, reportons-nous à l'égalité (20) qui donne la valeur de $\frac{dx}{dt}$. Puisque la valeur absolue de y va sans cesse en décroissant, il en est de même de $\frac{dx}{dt}$. Pour $t = 0$, la valeur de $\frac{dx}{dt}$ est positive; pour $t = \frac{\omega'_2}{2i}$, y étant nul, $\frac{dx}{dt}$ est égal à $-3e_2$. Donc si l'on a $e_2 < 0$, $\frac{dx}{dt}$ est constamment positive; si l'on a $e_2 > 0$, $\frac{dx}{dt}$ décroît constamment depuis une valeur positive jusqu'à une valeur négative et change une fois de signe dans l'intervalle $\left(0, \frac{\omega'_2}{2i}\right)$. En faisant varier t au dehors de cet intervalle, on a des arcs de courbes se déduisant du précédent par symétrie par rapport à Oy et par rapport à des centres situés sur Ox ayant pour abscisses $\pm h$, $\pm 2h$, ..., $\pm nh$.

Fig. 32.

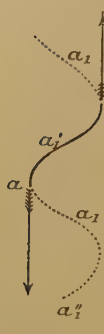


Fig. 33.

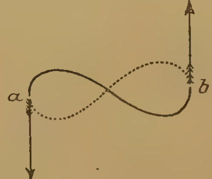
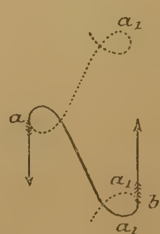


Fig. 34.



Nous pouvons maintenant reconnaître la forme de la courbe en supposant successivement que e_2 est négatif, nul ou positif.

Ces trois cas conduisent aux formes des figures 32, 33 et 34. Dans la figure 16 (I), p. 203, on a représenté seulement un arc tel que l'arc $a'_1 b a_1$ de la figure 32. Dans ces nouvelles figures nous supposons l'axe Oy horizontal.

II. — Prisme droit chargé debout.

187. **Énoncé de la question.** — Une verge élastique, droite dans son état naturel, est encastrée verticalement à l'une de ses extrémités M_0. L'autre extrémité M_1 supporte un poids P. On demande la forme de la verge élastique dans la position d'équilibre.

Ce problème est un cas particulier du précédent. Dans le cas actuel, il n'y a pas de couple appliqué en M_1 : le moment fléchissant en ce point, $\frac{B}{\rho}$ est donc nul, ρ est infini; le point M_1 est un point d'inflexion. Au même point M_1 la force élastique est directement opposée au poids P : elle est donc verticale et dirigée de bas en haut. En M_0, d'après la façon dont la tige est supposée encastrée, la tangente est verticale, et par suite parallèle à la force élastique. D'après ce que nous avons vu n° 185, le point M_0 est un sommet tel que a (*fig.* 32, 33, 34).

On pourra donc prendre les valeurs suivantes du paramètre t :

$$t = 0, \qquad \text{pour le point } M_0,$$
$$t = (2n+1)\frac{\omega'_2}{2i}, \qquad \text{pour le point } M_1,$$

n désignant un nombre entier et positif. Soit l la longueur de l'arc M_0M_1 ; puisque $ds = \frac{a}{C}\,dt$, on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{l}{a} = \frac{2n+1}{C}\,\frac{\omega'_2}{2i}.$$

Écrivons maintenant que la force élastique est égale et directement opposée au poids P et rappelons-nous qu'en mettant le problème en équation, nous avons posé (n° 130)

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2C}{a^2} = \frac{T}{B}.$$

Nous trouvons comme nouvelle condition

$$(2) \qquad P = \frac{2BC}{a^2},$$

car T, qui est constant tout le long de la fibre moyenne du prisme, est ici égal à P.

188. Nombre de solutions. — Entre les deux égalités (1) et (2) éliminons a et remplaçons C par sa valeur

$$\frac{1}{C} = 2\sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)};$$

nous trouvons la condition

$$(3)\qquad Pl^2 = (2n+1)^2 B\left(\frac{\omega'_2}{i}\right)^2 \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}$$

qui ne dépend plus que des éléments elliptiques et des données numériques qui définissent l'expérience. La discussion de cette égalité nous conduira au nombre des solutions du problème.

Cette égalité peut s'écrire

$$(4)\qquad \frac{4Pl^2}{B(2n+1)^2\pi^2} = \left(\frac{2\omega'_2}{i\pi}\right)^2 \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}.$$

Or, nous avons vu (n° 150) que l'on a

$$\frac{\omega'_2}{i}\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}},$$

k'_1 étant une quantité réelle comprise entre 0 et 1, et ρ ayant pour valeur

$$\rho = \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)},$$

comme on le voit en multipliant membre à membre les expressions de $e_2 - e_1$ et $e_2 - e_3$ du n° 150. Le deuxième membre de l'équation (4) est donc le carré de l'expression

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}$$

qui est supérieure à 1, car elle croît constamment de 1 à ∞ quand $k_1'^2$ croît de 0 à 1. D'après cela, l'équation de condition (4) donne pour $k_1'^2$ une seule valeur comprise entre 0 et 1 si l'on a

$$\frac{4Pl^2}{B(2n+1)^2\pi^2} > 1$$

ou bien

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}} > (2n+1).$$

Si donc $\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}}$ est compris entre $(2\nu+1)$ et $(2\nu+3)$, en faisant successivement

$$n = 1, 2, \ldots, \nu,$$

on aura ν équations en $k_1'^2$ admettant chacune une racine comprise entre 0 et 1 et, par suite, il y aura ν positions d'équilibre. Si l'on a

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}} < 1,$$

il n'existe plus de valeur de $k_1'^2$ comprise entre 0 et 1; il n'y a plus de forme d'équilibre autre que la ligne droite. Dans ce cas, le prisme droit chargé debout est en équilibre stable.

II. — Courbe élastique plane sous pression normale uniforme.

189. Énoncé et mise en équation. — Il s'agit de trouver la figure d'équilibre d'une verge élastique qui dans son état naturel était de forme rectiligne ou circulaire et qui est soumise à l'action de forces définies de la façon suivante : A chacune des extrémités de l'élastique agissent une force et un couple; en outre, sur chaque élément de l'arc agit une pression normale à l'élément, contenue dans le plan de la fibre moyenne et proportionnelle à la longueur de l'élément. Pour se représenter ces données, on peut considérer une chaudière cylindrique et la verge découpée dans la surface de cette chaudière par deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre et très voisins l'un de l'autre. Ce problème a été résolu par M. Maurice Levy.

Soient F_0 et M_0 la force et le moment du couple qui agissent sur la verge à l'une de ses extrémités A_0. Si l'on coupait l'élastique en l'un de ses points A, il faudrait, pour maintenir l'équilibre, introduire une force et un couple. Soient F la force et M le moment du couple. Pour définir avec précision la pression sur un élément d'arc, comptons sur la courbe l'arc s à partir d'une origine fixe dans un sens déterminé et rapportons la courbe à deux axes rectangulaires Ox et Oy. Soient s_1 l'arc qui correspond à un point A_1 de la courbe, ds_1 un élément d'arc compté à partir de ce point, α_1 l'angle que fait Ox avec la tangente en A_1, cette tangente étant menée dans le sens où l'arc va en croissant.

La pression qui s'exerce sur l'élément ds_1 a pour intensité $p\,ds_1$, p désignant une constante : nous la regarderons comme positive lorsqu'elle s'exerce dans le sens $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, de sorte que ses projections sur les deux axes sont

$$p\,ds_1 \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad p\,ds_1 \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou bien

$$-p\,ds_1 \sin\alpha_1, \quad p\,ds_1 \cos\alpha_1,$$

ou bien

$$-p\,dy_1, \quad p\,dx_1.$$

Exprimons que les forces agissant sur l'élément $A_0 A$ se font équilibre.

Nous écrirons d'abord que la somme des projections des forces sur chacun des deux axes est nulle. Nous avons, en désignant par X, Y les projections de F, par X_0, Y_0 celles de F_0,

$$X + X_0 - \int p\,dy_1 = 0,$$

$$Y + Y_0 + \int p\,dx_1 = 0.$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \begin{cases} X = p(y - b), \\ Y = -p(x - a), \end{cases}$$

en désignant par x, y les coordonnées du point A et par a et b des constantes. Elles expriment que la perpendiculaire menée en A à la direction de la force va passer par un point O′ de coordonnées a et b, qui reste fixe quand on fait varier la position du point A. Ce point se nomme *centre des forces élastiques*.

Nous prendrons ce point O′ comme nouvelle origine en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes. Alors les projections de F deviennent

$$X = py, \qquad Y = -px,$$

et son moment par rapport au point O′ est

$$xY - yX = -p(x^2 + y^2) = -pr^2;$$

on a ainsi l'intensité et le sens de la force F.

Nous allons écrire maintenant que la somme des moments par rapport au point O' est nulle. D'après la théorie de l'élasticité, le moment M du couple qu'il faut joindre à la force F pour avoir l'action exercée en A sur l'arc A_0A est donné par la formule

$$(2) \qquad M = m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

m désignant un facteur constant et positif, ρ le rayon de courbure en A dans la position d'équilibre considérée, c'est-à-dire $\frac{ds}{d\alpha}$, et ρ_0 le rayon de courbure au point A dans la position naturelle.

D'autre part, le moment de la pression s'exerçant sur l'élément ds_1, ayant pour coordonnées x_1, y_1, est

$$p(x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1) = p\frac{dr_1^2}{2};$$

les moments de la force et du couple correspondant au point A_0 sont des constantes. On a donc, en écrivant que la somme des moments des forces appliquées à l'arc A_0A est nulle,

$$m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - pr^2 + \frac{p}{2}\int_{r_0^2}^{r^2} dr_1^2 = \text{const.}$$

ou, en modifiant la valeur de la constante,

$$(3) \qquad m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - pr^2 + \frac{pr^2}{2} = \text{const.}$$

L'égalité résolue par rapport à $\frac{1}{\rho}$ est de la forme

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = 4Ar^2 + 4B,$$

A et B désignant des constantes. En particulier, $A = \frac{p}{8m}$, de sorte que A est positif; B peut avoir un signe quelconque; les coefficients numériques ont été mis pour simplifier l'écriture dans les calculs suivants.

Cette égalité peut être considérée comme une équation différentielle définissant la courbe élastique.

199. Tableau de formules. (*Courbe élastique sous pression normale constante.*)

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho} = 4\,\mathrm{A}\,r^2 + 4\,\mathrm{B},$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{r\,dr},$$

$$(6)\qquad \frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{dr^2} = 2\,\mathrm{A}\,r^2 + 2\,\mathrm{B},$$

$$(7)\qquad r^2\frac{d\theta}{ds} = \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C}, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 = r^2 - (\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C})^2,$$

$$(9)\qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C}}{r^2},$$

$$(10)\qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \wp'' v - 2z\,\wp' v = 2[\wp u - \wp v][\wp(u+v) - \wp v], \\ z^2 - 3\,\wp\, v = \;[\wp u - \wp v] + [\wp(u+v) - \wp v], \end{cases}$$

$$(12)\qquad \mathrm{Z} = (z^2 - 3\,\wp v)^2 - 2(\wp'' v - 2z\,\wp' v) = [\wp u - \wp(u+v)]^2,$$

$$(13)\qquad 2(\wp'' v - 2z\,\wp' v) = r^2,$$

$$(14)\qquad \wp'^2 v = \frac{1}{16\,\mathrm{A}}, \qquad \wp'' v = -\frac{\mathrm{B}}{2\,\mathrm{A}}, \qquad 3\,\wp v = \frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}}{\mathrm{A}},$$

on supposera $0 < v < \omega, \qquad \wp v > e_1, \qquad \wp' v < 0, \qquad \wp'' v > 0;$

$$(15)\qquad r^2 - (\mathrm{A}\,r^4 + \mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C})^2 = -[\wp u - \wp(u+v)]^2 = -\left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$(16)\qquad du = \frac{i\,ds}{2\,\wp' v},$$

$$(17)\qquad \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C} = [\wp u - \wp v] + [\wp(u+v) - \wp v],$$

$$(18)\qquad 2i\frac{d\theta}{du} = \frac{\wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp' v}{\wp(u+v) - \wp v},$$

$$(19)\qquad \begin{aligned} -2i\frac{d\theta}{du} = {} & \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v \\ & + \zeta(u+2v) - \zeta u - 2\zeta v, \end{aligned}$$

$$(21)\qquad u = -\frac{v}{2} - it,$$

$$(22)\qquad r^2 = \left[\wp\left(\frac{v}{2} + it\right) - \wp v\right]\left[\wp\left(\frac{v}{2} - it\right) - \wp v\right],$$

$$(23)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} - it\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{3v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{3v}{2} - it\right)\right] - 2\zeta v.$$

191. Intégration par les fonctions elliptiques. — Nous allons d'abord établir une formule donnant le rayon de courbure d'une courbe définie en coordonnées polaires.

On a en désignant par α l'angle de la tangente avec Ox :

$$r^2\,d\theta = x\,dy - y\,dx,$$

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = x\sin\alpha - y\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\theta}{ds}\right) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{d\alpha}{ds} = \left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right)\frac{1}{\rho} = r\frac{dr}{ds}\times\frac{1}{\rho},$$

d'où la formule annoncée

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{r\,dr}. \tag{5}$$

D'après cette formule, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$\frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{dr^2} = 2Ar^2 + 2B. \tag{6}$$

En intégrant et en désignant par C une nouvelle constante,

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = Ar^4 + 2Br^2 + C. \tag{7}$$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité (7) et en nous servant de la formule

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

nous pourrons éliminer $d\theta$. Nous trouverons ainsi l'équation

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 = r^2 - (Ar^4 + 2Br^2 + C)^2 \tag{8}$$

qui définit r^2 comme fonction elliptique de l'arc s. L'angle θ est ensuite déterminé par la formule

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{Ar^4 + 2Br^2 + C}{r^2}. \tag{9}$$

On définit ainsi les coordonnées polaires r et θ d'un point de la courbe en fonction de la variable s. Le calcul effectif est dû à Halphen.

192. Inversion. — On a vu, en étudiant l'inversion (n° 169), que si l'on pose

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \tag{10}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned} p''v - 2z\,p'v &= 2[pu - pv][p(u+v) - pv],\\ z^2 - 3\,pv &= (pu - pv) + [p(u+v) - pv], \end{aligned}\right. \tag{11}$$

de sorte que

$$Z \equiv (z^2 - 3\,pv)^2 - 2(p''v - 2z\,p'v) = [pu - p(u+v)]^2, \tag{12}$$

et par suite z et $\sqrt{Z}$ s'expriment en fonctions uniformes de u.

Si l'on pose

$$2(p''v - 2z\,p'v) = r^2, \tag{13}$$

le polynome Z se ramène à la forme

$$(A'r^4 + 2B'r^2 + C')^2 - r^2,$$

et pour identifier ce polynome en r^2 avec celui qui donne $-\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2$ (éq. 8), il suffit de poser

$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C.$$

Le calcul n'offre aucune difficulté et l'on trouve

$$A = \frac{1}{16\,p'^2 v}, \qquad B = -\frac{p''v}{8\,p'^2 v}, \qquad C = \left(\frac{p''v}{2\,p'v}\right)^2 - 3\,pv,$$

ou, en résolvant par rapport à pv, $p'v$, $p''v$,

$$p'^2 v = \frac{1}{16A}, \qquad p''v = -\frac{B}{2A}, \qquad 3\,pv = \frac{B^2 - AC}{A}. \tag{14}$$

Si, dans les relations qui existent entre pv, $p'v$, $p''v$, on remplace ces quantités par leurs valeurs tirées de (14), on aura g_2 et g_3. *Nous supposerons les données choisies de façon que le discriminant soit positif;* les valeurs de pv et de $p'v$ sont réelles puisque A est positif et l'on peut arbitrairement choisir le signe de $p'v$. Nous examinerons seulement le cas où v satisfait à la condition

$$0 < v < \omega.$$

de sorte que l'on a

$$\mathrm{p}v > e_1, \qquad \mathrm{p}'v < 0, \qquad \mathrm{p}''\frac{v}{2} > 0.$$

Les éléments elliptiques étant ainsi fixés, on a, en tenant compte des égalités (12), (13) et (10),

$$(15) \qquad r^2 - (Ar^4 + 2Br^2 + C)^2 = -[\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v)]^2.$$

Il en résulte

$$r^2 - (Ar^4 + 2Br^2 + C)^2 = -\left(\frac{dz}{du}\right)^2.$$

Mais le premier membre est égal à $\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2$ d'après l'équation différentielle de la courbe (éq. 8) : le second membre, d'après la relation (13), est égal à $-\left(\frac{dr^2}{du}\right)^2\frac{1}{16\mathrm{p}'^2 v}$; on a donc

$$(16) \qquad du = \frac{i\,ds}{2\,\mathrm{p}'v}.$$

Cette égalité montre comment est liée à l'arc s la variable u que nous allons garder comme variable indépendante.

Nous avons déjà r^2 en fonction de u au moyen des relations (13) et (11); pour avoir θ il suffit de remplacer r^2 par sa valeur en fonction de u dans le second membre de l'équation (9), c'est-à-dire dans

$$\frac{Ar^4 + 2Br^2 + C}{r^2}.$$

On a d'abord, en tenant compte des relations (13) et (14),

$$Ar^4 + 2Br^2 + C = z^2 - 3\,\mathrm{p}v;$$

puis, en se servant de la seconde des relations (11),

$$(17) \qquad Ar^4 + 2Br^2 + C = (\mathrm{p}u - \mathrm{p}v) + [\mathrm{p}(u+v) - \mathrm{p}v].$$

Il est facile maintenant d'obtenir en fonction de u l'expression de $\frac{d\theta}{du}$; on trouve successivement

$$\frac{2i}{\mathrm{p}'v}\frac{d\theta}{du} = \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v) + [\mathrm{p}(u+v) - \mathrm{p}v]}{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)[\mathrm{p}(u+v) - \mathrm{p}v]},$$

$$(18) \qquad 2i\frac{d\theta}{du} = \frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} + \frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}(u+v) - \mathrm{p}v},$$

ou, d'après la formule (64) du n° 44,

$$(19) \qquad -2i\frac{d\theta}{du} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v + \zeta(u+2v) - \zeta u - 2\zeta v$$

Nous avons ainsi r^2 et θ en fonction de u. Réunissons ici les deux équations correspondantes, en appelant E une constante :

$$(20) \qquad \begin{cases} r^2 = 4(p u - p v)[p(u+v) - p v], \\ e^{2i(\theta-\theta_0)} = \mathrm{E}\, e^{4u\zeta v} \dfrac{\sigma u\, \sigma(u-v)}{\sigma(u+v)\,\sigma(u+2v)}, \qquad du = \dfrac{i\,ds}{2\,p' v}. \end{cases}$$

193. Nature des arguments. — Puisque v est compris entre o et ω, l'expression (16) de du en fonction de ds montre que u est certainement imaginaire. D'autre part, pour que r^2 soit réel, il faut que les deux facteurs dont le produit donne r^2 soient ou tous deux réels ou imaginaires conjugués; voyons s'ils peuvent être réels. Si une valeur imaginaire de u rend $p u$ réelle, et si du est imaginaire, u est, à des périodes près, de la forme ix ou $\omega + ix$, x étant une valeur réelle; mais les valeurs de cette forme ne rendent pas réelle $p(u+v)$; elles sont donc à rejeter. Il reste à exprimer que $p u$ et $p(u+v)$ sont imaginaires conjuguées. Soit $u = a + bi$. D'après la formule d'addition donnée (n° 45) pour la fonction $p u$, les deux valeurs $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont imaginaires conjuguées : il faut donc que l'on ait

$$u + v = \pm(a - bi) + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers, et en égalant les parties réelles dans les deux membres

$$a + v = \pm a + 2m\omega.$$

On ne peut pas prendre le signe $+$ puisque v n'est pas un multiple de 2ω; il faut donc que l'on ait

$$2a + v = 2m\omega,$$

ce qui donne

$$a = -\frac{v}{2} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{v}{2} + \omega.$$

Nous examinerons seulement le premier cas et nous poserons

$$(21) \qquad u = -\frac{v}{2} - it,$$

t étant une variable réelle; de sorte que l'on aura

$$du = -i\,dt,$$

et comme on a trouvé (éq. 16)

$$du = \frac{i\,ds}{2\,p'v},$$

on a aussi

$$dt = -\frac{1}{2\,p'v}\,ds;$$

$p'v$ étant négative, dt a le même signe que ds.

194. Intervalle dans lequel il suffit de faire varier t. — La première des formules (20) montre que r^2 ne change pas quand on change u en $u + 2\omega'$ ou bien t en $t + \frac{2\omega'}{i}$. D'autre part $\frac{d\theta}{du}$ est une fonction rationnelle de r^2; il en est de même pour $\frac{d\theta}{dt}$. Il en résulte que, pour une valeur donnée de dt, la valeur de $d\theta$ ne change pas quand on change t en $t + \frac{2\omega'}{i}$ et, par suite, que l'accroissement de θ est le même quand on fait varier t de o à t_1 ou bien de $\frac{2\omega'}{i}$ à $\frac{2\omega'}{i} + t_1$. Si donc on a construit la branche de courbe obtenue en faisant varier t de o à $\frac{2\omega'}{i}$ et si on la fait tourner d'un angle égal à l'angle des rayons extrêmes, on aura la branche de la courbe décrite quand t varie de $\frac{2\omega'}{i}$ à $\frac{4\omega'}{i}$.

D'après cela, il suffit de faire varier t de o à $\frac{2\omega'}{i}$; mais on peut restreindre cet intervalle. En faisant $u = -\frac{v}{2} + it$ dans l'expression de r^2, on trouve

$$(22) \qquad \frac{r^2}{4} = \left[p\left(\frac{v}{2} + it\right) - pv\right]\left[p\left(\frac{v}{2} - it\right) - pv\right],$$

et l'on vérifie aisément que r^2 prend les mêmes valeurs pour $t_1 = \frac{\omega'}{i} + h$ et pour $t_2 = \frac{\omega'}{i} - h$.

D'autre part, pour un même accroissement dh, les accroissements dt_1 et dt_2 sont de signes contraires; les accroissements

correspondants $d\theta_1$ et $d\theta_2$ sont égaux et de signes contraires, puisque $\frac{d\theta}{dt}$ ne dépend de t que par l'intermédiaire de r^2. Donc les accroissements que prend θ, quand on fait varier t de $\frac{\omega'}{i}$ à $\frac{\omega'}{i}+h$, puis de $\frac{\omega'}{i}$ à $\frac{\omega'}{i}-h$, sont égaux et de signes contraires. La courbe est symétrique par rapport au rayon qui correspond à $t=\frac{\omega'}{i}$, et il suffit de faire varier t de o à $\frac{\omega'}{i}$.

195. Variation de r^2. — En tenant compte de la relation (13) entre r^2 et z, on a

$$\frac{dr^2}{du}=-4\,p'v\frac{dz}{du}=-4\,p'v\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right),$$

ou bien

$$\frac{dr^2}{du}=4\,p'v[p(u+v)-pu],$$

et, comme on a posé $u=-\frac{v}{2}-it$,

$$\frac{dr^2}{dt}=4i\,p'v\left[p\left(\frac{v}{2}+it\right)-p\left(\frac{v}{2}-it\right)\right].$$

Cherchons les valeurs de t qui annulent le second membre. Pour l'une de ces valeurs, on doit avoir, à des périodes près,

$$\frac{v}{2}+it=\pm\left(\frac{v}{2}-it\right).$$

Le signe — est à rejeter, puisque v n'est pas un multiple des périodes, et par suite

$$2it=2m\omega+2n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers. Comme it est purement imaginaire,

$$it=n\omega';$$

les seules valeurs de t appartenant à l'intervalle $\left(0,\frac{\omega'}{i}\right)$ qui annulent $\frac{dr^2}{dt}$ sont donc les valeurs extrêmes.

Pour reconnaître celle de ces valeurs qui correspond à un maxi-

mum, prenons la dérivée seconde

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = -4\,p'v\left[p'\left(\frac{v}{2}+it\right)+p'\left(\frac{v}{2}-it\right)\right].$$

Pour $t=0$, le second membre se réduit à $-8\,p'v\,p'\frac{v}{2}$; il est négatif puisque v et $\frac{v}{2}$ étant compris entre o et ω, $p'v$ et $p'\frac{v}{2}$ sont toutes les deux négatives; c'est donc $t=0$ qui correspond au maximum. r^2 décroît constamment quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$. Nous désignerons par r_0^2 et r_1^2 les valeurs de r^2 qui correspondent à $t=0$ et à $t=\frac{\omega'}{i}$.

196. **Variation de l'angle polaire.** — Dans la formule

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = A r^4 + 2 B r^2 + C,$$

remplaçons ds par $-2\,p'v\,dt$; elle devient

$$-\frac{1}{2\,p'v}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = A r^4 + 2 B r^2 + C;$$

le trinome $A r^4 + 2 B r^2 + C$ a ses racines réelles, puisque, d'après l'une des relations (14), $B^2 - AC$ est du signe de pv et que pv, supérieur à e_1, est positive. Voyons d'abord combien ce trinome a de racines comprises en r_0^2 et r_1^2.

L'égalité (17), où l'on remplace u par $-\frac{v}{2}+it$, devient

$$A r^4 + 2 B r^2 + C = p\left(\frac{v}{2}+it\right)+p\left(\frac{v}{2}-it\right) - 2\,pv.$$

En y faisant successivement $t=0$, puis $t=\frac{\omega'}{i}$, on trouve

$$A r_0^4 + 2 B r_0^2 + C = 2\left(p\frac{v}{2} - pv\right),$$

$$A r_1^4 + 2 B r_1^2 + C = 2\left[p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) - pv\right].$$

La différence $p\frac{v}{2} - pv$ est positive, puisque pu décroît, quand u croît de o à ω; la différence $p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) - pv$ est négative,

puisque $p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$ est comprise entre e_2 et e_3 et que pv est plus grande que e_1. Donc r_0^2 et r_1^2 comprennent une seule racine du trinome.

Quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, r^2 décroît constamment de r_0^2 à r_1^2, $\frac{d\theta}{dt}$ change une seule fois de signe. Comme A est positif, et pv négative, on voit que l'on a

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 > 0, \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 < 0,$$

en désignant par $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ et $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1$ les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$ qui correspondent à $t=0$ et à $t=\frac{\omega'}{i}$.

197. **Angle des rayons allant à deux sommets consécutifs.** — Il nous sera utile, pour étudier la forme de la courbe, de connaître l'angle des rayons correspondant aux valeurs extrêmes de l'intervalle $\left(0, \frac{\omega'}{i}\right)$ dans lequel nous faisons varier t; cet angle est la moitié de l'accroissement que prend θ quand t varie de o à $\frac{2\omega'}{i}$. Nous allons faire le calcul en supposant que t varie de t_0 à $t_0+\frac{2\omega'}{i}$.

Dans la formule (19), qui donne $\frac{d\theta}{du}$, faisons $u=-\frac{v}{2}-it$ et $du=-i\,dt$; nous obtenons, en tenant compte de ce que ζu est une fonction impaire,

$$(23)\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{v}{2}+it\right)+\zeta\left(\frac{v}{2}-it\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{3v}{2}+it\right)+\zeta\left(\frac{3v}{2}-it\right)\right]-2\zeta v.$$

Faisons maintenant varier t de t_0 à $t_0+\frac{2\omega'}{i}$ et désignons par 2ψ l'accroissement de θ; nous aurons

$$(24)\quad 2\psi=-\frac{4\omega'}{i}\zeta v+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}}\left[\zeta\left(\frac{v}{2}+it\right)+\zeta\left(\frac{v}{2}-it\right)\right]dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}}\left[\zeta\left(\frac{3v}{2}+it\right)+\zeta\left(\frac{3v}{2}-it\right)\right]dt.$$

Le second membre se simplifie beaucoup, si l'on se sert d'une formule à laquelle nous serons conduits en cherchant à évaluer une intégrale de la forme

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a+it)\,dt,$$

a étant une quantité réelle telle que l'on ait

$$0 < a < 2\omega.$$

La fonction sous le signe somme est la dérivée de

$$\frac{1}{i}\operatorname{Log}\sigma(a+it);$$

l'intégrale définie est

$$\frac{1}{i}\operatorname{Log}\frac{\sigma(a+it_0+2\omega')}{\sigma(a+it_0)}.$$

D'après la relation (22) du n° 21, on a

$$\frac{\sigma(a+it_0+2\omega')}{\sigma(a+it_0)} = -e^{2\eta'(a+it_0+\omega')}$$

et, par suite,

$$\operatorname{Log}\frac{\sigma(a+it_0+2\omega')}{\sigma(a+it_0)} = 2\eta'(a+it_0+\omega')+(2n+1)i\pi,$$

n étant un nombre entier qui n'est pas déterminé par le calcul précédent. On en conclut

$$(25)\qquad \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a+it)\,dt = \frac{2\eta'}{i}a+(2n+1)\pi+\frac{2\eta'}{i}(it_0+\omega').$$

Dans cette égalité, changeons i en $-i$ en remarquant que $\frac{\omega'}{i}$ est réel et qu'il en est de même de $\frac{\eta'}{i}$, d'après la relation d'homogénéité (52) (n° 36); il vient alors

$$(26)\qquad \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a-it)\,dt = \frac{2\eta'}{i}a+(2n+1)\pi-\frac{2\eta'}{i}(it_0+\omega');$$

puis ajoutons membre à membre les égalités (25) et (26), et nous

obtenons la formule qu'il s'agissait d'établir :

$$(27)\quad \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} [\zeta(a+it)+\zeta(a-it)]\,dt = \frac{2\eta'}{i}a+(2n+1)\pi.$$

Mais il reste à déterminer le nombre entier n. Cette détermination est facile quand $a=\omega$. En effet, la fonction sous le signe somme est égale à

$$\frac{p'a}{pa-pit}+2\zeta a;$$

pour $a=\omega$, elle se réduit à $2\zeta\omega$, c'est-à-dire à 2η; l'égalité précédente devient

$$\frac{2}{i}(\eta\omega'-\omega\eta')=(2n+1)\pi,$$

et l'on en conclut $n=0$. Mais quand a varie d'une manière continue entre 0 et 2ω, le second membre de l'égalité (27) varie d'une manière continue, et n ne peut changer. Donc $n=0$ pour toute valeur de a comprise entre 0 et 2ω, et par suite, on a

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} [\zeta(a+it)+\zeta(a-it)]\,dt = \dfrac{2\eta'}{i}a+\pi, \\ 0<a<2\omega. \end{cases}$$

En appliquant la formule précédente à chacune des deux intégrales qui figurent dans l'expression de ψ, nous trouverons enfin

$$\psi=\pi-\frac{2}{i}(\omega'\zeta v-v\eta'.)$$

Cette égalité va nous permettre de trouver le signe de ψ.

Remarquons que, pour $v=\omega$, ψ est nul à cause de la relation $\eta\omega'-\omega\eta'=\frac{i\pi}{2}$; puis cherchons comment varie ψ quand v croît de 0 à ω. On a

$$\frac{d\psi}{dv}=\frac{2}{i}(\omega' pv+\eta');$$

cette dérivée décroît constamment quand v croît de 0 à ω; pour $v=\omega$, elle est égale à

$$\frac{2}{i}(e_1\omega'+\eta').$$

Or nous avons trouvé (n° 101)

$$e_1\omega'+\eta'=-\frac{2\pi^2}{\omega'}\sum\frac{q_0^n}{(1-q_0^n)^2},\qquad q_0=e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$$

$$(n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots),$$

et l'on voit que l'on a

$$\frac{1}{i}(e_1\omega'+\eta')>0.$$

Donc $\dfrac{d\psi}{dv}$ est positive pour $v=\omega$ et, comme c'est une fonction décroissante dans l'intervalle $(0,\omega)$, elle est constamment positive dans cet intervalle. Il en résulte que ψ croît quand v croît de 0 à ω, et comme ψ s'annule pour $v=\omega$, on a

$$\psi<0\qquad\text{quand}\qquad 0<v<\omega.$$

Si nous comparons maintenant le signe de ψ et celui de $\dfrac{d\theta}{dt}$, nous voyons que, quand t croît de 0 à $\dfrac{\omega'}{i}$, l'angle θ commence par croître, mais que sa variation totale est négative. Nous avons trouvé d'autre part que $\dfrac{d\theta}{dt}$ s'annule en changeant de signe pour une valeur et une seule de l'intervalle $\left(0,\dfrac{\omega'}{i}\right)$: soit t' cette valeur; la discussion peut se résumer ainsi :

t croissant de 0 à t', θ va constamment en croissant; pour $t=t'$ le rayon vecteur est tangent à la courbe; t croissant de t' à $\dfrac{\omega'}{i}$, l'angle θ décroît plus qu'il ne s'était accru quand t variait de 0 à t'.

198. **Signe du rayon de courbure.** — On a trouvé en commençant (éq. 4) l'égalité

$$\frac{1}{\rho}=4Ar^2+4B;$$

le second membre est égal à deux fois la dérivée prise par rapport à r^2 du trinome Ar^4+2Br^2+C, et d'autre part il résulte des calculs faits pour l'inversion [formules (13), (17) et (11)] que l'on a en même temps

$$r^2=2(p''v-2z\,p'v)$$

et

$$Ar^4+2Br^2+C=z^2-3\,pv.$$

Dérivons par rapport à r^2 les deux membres de la dernière égalité

$$\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B} = z\frac{dz}{dr^2} = \frac{-z}{4\,\mathrm{p}'v}.$$

On en déduit, en remplaçant z par sa valeur (10) en fonction de u,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2\,\mathrm{p}'v}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}.$$

Voyons comment varie le signe de $\frac{1}{\rho}$ quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$. r^2 va sans cesse en décroissant; $\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B}$ ne peut s'annuler au plus qu'une fois; il nous suffira donc d'avoir les signes des valeurs de $\frac{1}{\rho}$ pour $t = 0$ et pour $t = \frac{\omega'}{i}$; nous désignerons ces valeurs par $\frac{1}{\rho_0}$ et $\frac{1}{\rho_1}$; pour $t = 0$,

$$u = -\frac{v}{2}, \qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\mathrm{p}'\frac{v}{2} + \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}\frac{v}{2} - \mathrm{p}v} \times \frac{1}{2\,\mathrm{p}'v};$$

pour $t = \frac{\omega'}{i}$,

$$u = -\frac{v}{2} - \omega', \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\mathrm{p}'\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) + \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) - \mathrm{p}v} \times \frac{1}{2\,\mathrm{p}'v}.$$

Les valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ et de $\frac{1}{\rho_1}$ peuvent se simplifier si l'on se sert de la relation

$$\frac{\mathrm{p}''u_1}{\mathrm{p}'u_1} = \frac{\mathrm{p}'u_1 + \mathrm{p}'2u_1}{\mathrm{p}u_1 - \mathrm{p}2u_1},$$

que l'on déduit de la formule d'addition (n° 62)

$$\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'u_1}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}u_1} = \frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'(u+u_1)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+u_1)},$$

en y faisant tendre u vers u_1. A l'aide de cette relation, on obtient

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} &= \frac{1}{2\,\mathrm{p}'v\,\mathrm{p}'\frac{v}{2}}\,\mathrm{p}''\frac{v}{2}, \\ \frac{1}{\rho_1} &= \frac{1}{2\,\mathrm{p}'v\,\mathrm{p}'\left(\frac{v}{2} + \omega'\right)}\,\mathrm{p}''\left(\frac{v}{2} + \omega'\right); \end{aligned}\right.$$

v étant compris entre o et ω, $p'v$ et $p'\frac{v}{2}$ sont négatives, $p''\frac{v}{2}$ positive donc on a déjà

$$\frac{1}{\rho_0} > 0.$$

D'autre part, $p'\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$ étant positive, $\frac{1}{\rho_1}$ est de signe contraire à

$$p''\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$$

Cette quantité peut s'obtenir en substituant $p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$ dans le polynome du second degré en pu

$$12p^2u - g_2,$$

et l'on trouve aisément que l'on aura

$$p''\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) < 0,$$

si v satisfait à l'inégalité

(30) $$p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) > -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}.$$

Mais on peut poser

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} = p(a+\omega'),$$

a étant une quantité réelle comprise entre o et $\frac{\omega}{2}$ (*voir* p. 107, n° 1); l'inégalité (30) peut alors s'écrire

$$p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) > p(a+\omega'),$$

et comme $p(u+\omega')$ croît constamment quand u croît de o à ω, elle peut être remplacée par la condition

$$\frac{v}{2} > a.$$

Il faut donc, quand on étudie le signe de la courbure, distinguer les deux cas suivants, en remarquant que $a+\omega'$ désigne l'abscisse du point le plus haut de l'ovale dans la cubique

$x = pu, y = p'u$:

$$0 < v < 2a \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0} > 0, \\ \dfrac{1}{\rho_1} < 0, \end{cases}$$

$$2a < v < \omega \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0} > 0, \\ \dfrac{1}{\rho_1} > 0. \end{cases}$$

Il se produit une inflexion de la figure d'équilibre quand v passe en décroissant par la valeur $2a$ et il est facile de voir que l'inflexion se produit au point donné par $t = \frac{\omega'}{i}$. En effet, la valeur correspondante de u est

$$-\frac{v}{2} - \omega' = -a - \omega',$$

et la valeur correspondante de la fonction p, savoir

$$p(a + \omega'),$$

est, d'après la définition même de a, racine de $p''u$, de sorte que $\frac{1}{\rho_1}$ est égal à zéro, dans le cas particulier $v = 2a$.

199. **Forme de la courbe.** — Nous avons supposé que v satisfait à la condition $0 < v < \omega$ et, dans l'étude de la courbure, nous avons été conduits à distinguer deux cas suivant que l'on a

$$v < 2a \quad \text{ou} \quad v > 2a.$$

Dans les deux cas, t croissant de 0 à $\frac{\omega'}{i}$, l'arc s va constamment en croissant, le rayon vecteur va constamment en décroissant et les rayons extrêmes correspondent, le premier à un maximum et le second à un minimum; l'angle θ commence par croître jusqu'à une valeur t', pour laquelle le rayon vecteur est tangent à la courbe, puis décroît jusqu'à une valeur inférieure à la valeur initiale.

Pour ce qui regarde la courbure, si $v > 2a$, la courbure $\frac{d\alpha}{ds}$ est constamment positive, l'angle α correspond au sens dans lequel s croît; c'est précisément le sens dans lequel l'arc de courbe est

décrit quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$; le rayon de courbure est compté à partir de la courbe dans le sens $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Si $v < 2a$, il y a une inflexion et, si v diffère peu de $2a$, le point d'inflexion est dans le voisinage du sommet qui correspond à $t = \frac{\omega'}{i}$.

On a alors les deux formes de la courbe, représentées par les figures 35 et 36, dont la première correspond à $v > 2a$ et la deuxième à $v < 2a$. On a représenté par un trait plus fort l'arc décrit quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, on a marqué par une grande flèche le sens de la pression normale, et l'on a tracé aux points a et b des flèches dont le sens indique la direction de la réaction exercée par la verge. Ce sens est opposé à celui de la force extérieure qu'il faudrait appliquer pour maintenir l'équilibre (Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II, p. 220).

Fig. 35.

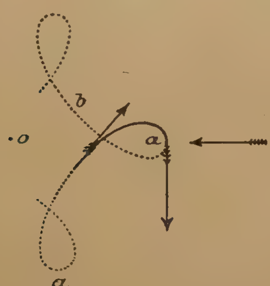
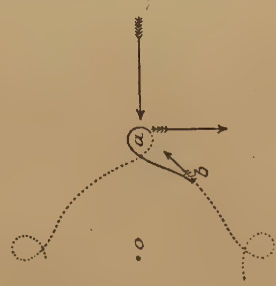


Fig. 36.



Sens de la pression normale. — En mettant le problème en équation, nous avons supposé la pression comptée dans le sens $\alpha + \frac{\pi}{2}$; elle est donc du côté de la convexité dans le voisinage du rayon maximum et, s'il y a inflexion, du côté de la concavité dans le voisinage du rayon minimum.

IV. — Surfaces homofocales, coordonnées elliptiques.

200. Surfaces homofocales à un ellipsoïde et passant par un point donné. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy,

Oz, on appelle *surfaces homofocales à un ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}-1=0,$$

dans laquelle s désigne un paramètre variable.

Si l'on considère celles de ces surfaces qui passent par un point donné $P(x_0, y_0, z_0)$, on a, pour déterminer les valeurs correspondantes du paramètre s, l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2-s}+\frac{y_0^2}{b^2-s}+\frac{z_0^2}{c^2-s}-1=0.$$

Les racines de cette équation se séparent aisément en substituant dans le premier membre des nombres voisins de a^2, b^2, c^2 et des nombres très grands en valeur absolue. Les signes des résultats de la substitution et les places des racines sont indiqués par le Tableau suivant, dans lequel ε désigne un nombre positif et très petit :

$$a^2 < b^2 < c^2,$$

	$-\infty$		$a^2-\varepsilon$	$a^2+\varepsilon$		$b^2-\varepsilon$	$b^2+\varepsilon$		$c^2-\varepsilon$	$c^2+\varepsilon$	$+\infty$
Signes.....	$-$		$+$	$-$		$+$	$-$		$+$	$-$	$-$
Racines...		λ			μ			ν			

Il y a donc trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde et passant par le point P. La racine λ donne un ellipsoïde réel, la racine μ un hyperboloïde à une nappe, la racine ν un hyperboloïde à deux nappes.

Les trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde qui passent par un point donné se coupent orthogonalement en ce point.

Soit $P(x, y, z)$ le point donné; les normales aux deux surfaces λ et μ qui passent par ce point ont des cosinus directeurs proportionnels à

$$\frac{x}{a^2-\lambda}, \quad \frac{y}{b^2-\lambda}, \quad \frac{z}{c^2-\lambda},$$

$$\frac{x}{a^2-\mu}, \quad \frac{y}{b^2-\mu}, \quad \frac{z}{c^2-\mu}.$$

La condition pour que ces normales soient perpendiculaires est

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=0.$$

Or, en retranchant membre à membre les deux égalités

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}-1=0,$$

et en supprimant le facteur $\lambda-\mu$, on trouve précisément la condition qu'il s'agissait de vérifier. Donc les deux surfaces λ et μ se coupent orthogonalement au point P. On peut répéter le même raisonnement pour les surfaces λ et ν, ou μ et ν.

La proposition est donc démontrée.

201. Coordonnées elliptiques. — On peut déterminer un point P de l'espace en se donnant les valeurs λ, μ, ν des paramètres des trois surfaces qui sont homofocales à l'ellipsoïde donné et qui passent par ce point; λ, μ, ν se nomment les *coordonnées elliptiques* du point P. Nous avons déjà vu comment s'obtient l'équation qui donne λ, μ, ν quand x, y, z sont donnés. Calculons maintenant x, y, z en supposant λ, μ, ν donnés.

Dans l'identité

$$\frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}-1\equiv\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)},$$

chassons les dénominateurs et faisons tendre s successivement vers a^2, b^2, c^2 : nous trouverons

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

202. Longueur d'un arc infiniment petit. — Prenons les dérivées

logarithmiques des deux formules ci-dessus

$$2\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda}{\lambda-a^2}+\frac{d\mu}{\mu-a^2}+\frac{d\nu}{\nu-a^2},$$

$$2\frac{dy}{y}=\frac{d\lambda}{\lambda-b^2}+\frac{d\mu}{\mu-b^2}+\frac{d\nu}{\nu-b^2},$$

$$2\frac{dz}{z}=\frac{d\lambda}{\lambda-c^2}+\frac{d\mu}{\mu-c^2}+\frac{d\nu}{\nu-c^2},$$

et portons les valeurs de dx, dy, dz ainsi obtenues dans la formule

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2;$$

en tenant compte de l'orthogonalité des surfaces λ, μ, ν, nous obtiendrons l'expression de ds^2 en coordonnées elliptiques

$$ds^2=\mathrm{L}^2\,d\lambda^2+\mathrm{M}^2\,d\mu^2+\mathrm{N}^2\,d\nu^2,$$

L^2, par exemple, étant définie par l'égalité

$$4\mathrm{L}^2=\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}.$$

La valeur de $4\mathrm{L}^2$ s'obtient en prenant les dérivées par rapport à s des deux membres de l'identité

$$\frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}-1\equiv\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)},$$

et en faisant ensuite $s=\lambda$; on trouve ainsi

$$4\mathrm{L}^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}.$$

On a donc la formule

$$\begin{aligned}4\,ds^2&=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}\,d\lambda^2\\&+\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\,d\mu^2+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}\,d\nu^2.\end{aligned}$$

203. **Les coordonnées λ, μ, ν remplacées par des arguments elliptiques. Les coordonnées cartésiennes s'expriment par des fonctions uniformes de ces arguments.** — Les valeurs de x, y, z en fonction de λ, μ, ν contiennent des quantités irrationnelles par rapport

à λ, μ, ν; ce sont les valeurs que prennent les radicaux

$$\sqrt{a^2 - s}, \quad \sqrt{b^2 - s}, \quad \sqrt{c^2 - s},$$

quand on y remplace s par λ, μ ou ν. Mais nous savons que, si l'on considère une fonction pu et les quantités e_1, e_2, e_3 correspondantes, chacun des radicaux

$$\sqrt{pu - e_1}, \quad \sqrt{pu - e_2}, \quad \sqrt{pu - e_3}$$

peut être remplacé par une fonction uniforme. Nous sommes ainsi conduits à faire le changement de variable

$$-s = \mathrm{A}\, p\upsilon + \mathrm{B},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a^2 - s &= \mathrm{A}(p\upsilon - e_1), \\ b^2 - s &= \mathrm{A}(p\upsilon - e_2), \\ c^2 - s &= \mathrm{A}(p\upsilon - e_3), \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} a^2 + \mathrm{B} &= -\mathrm{A} e_1, \\ b^2 + \mathrm{B} &= -\mathrm{A} e_2, \\ c^2 + \mathrm{B} &= -\mathrm{A} e_3; \end{aligned}$$

en ajoutant membre à membre ces dernières égalités, on trouve l'égalité suivante qui détermine B :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\mathrm{B} = 0;$$

B étant connu, e_1, e_2, e_3 sont déterminés, à un facteur près de proportionnalité A, et les valeurs des invariants g_2 et g_3 en résultent. A reste indéterminé; nous supposerons A positif et nous le remplacerons par ρ^2 pour que l'écriture soit simplifiée quand nous extrairons les racines.

En définitive, les invariants de la fonction $p\upsilon$ résultent des égalités

$$\begin{aligned} \rho^2 e_1 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - a^2, \\ \rho^2 e_2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - b^2, \\ \rho^2 e_3 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - c^2, \end{aligned}$$

où e_1, e_2, e_3 sont bien rangés par ordre de grandeurs décrois-

santes; si l'on pose

$$\rho^2 p v = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - s,$$

on a

$$a^2 - s = \rho^2 (p v - e_1),$$
$$b^2 - s = \rho^2 (p v - e_2),$$
$$c^2 - s = \rho^2 (p v - e_3).$$

Remarquons aussitôt que e_1, e_2, e_3 étant réels, *nous sommes dans le cas du discriminant positif*.

Appelons u, v, w des arguments tels que pu, pv, pw soient les valeurs de $p v$ quand s égale λ, μ, ν; comme les signes de

$$p v - e_1, \quad p v - e_2, \quad p v - e_3$$

coïncident respectivement avec les signes de

$$a^2 - s, \quad b^2 - s, \quad c^2 - s,$$

on trouve aisément que les nombres

$$pu, \quad e_1, \quad pv, \quad e_2, \quad pw, \quad e_3$$

sont rangés par ordre de grandeurs décroissantes. D'après cela, u et $w - \omega'$ sont réels, $v - \omega$ est purement imaginaire.

Ce sont ces arguments u, v, w que nous voulons considérer à la place de λ, μ, ν.

Transformons les formules qui donnent x^2, y^2, z^2 en introduisant ces arguments elliptiques : elles deviennent

$$\frac{x^2}{\rho^2} = \frac{(pu - e_1)(pv - e_1)(pw - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$
$$\frac{y^2}{\rho^2} = \frac{(pu - e_2)(pv - e_2)(pw - e_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)},$$
$$\frac{z^2}{\rho^2} = \frac{(pu - e_3)(pv - e_3)(pw - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}.$$

On peut maintenant extraire les racines en se servant des formules du n° 48 (*voir* aussi p. 68, Ex. n° 3) : on trouve

$$\frac{x}{\rho} = A^2 \frac{\sigma_1 u\, \sigma_1 v\, \sigma_1 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad A = e^{-\frac{1}{2}\eta\omega}\, \sigma\omega,$$
$$\frac{y}{\rho} = B^2 \frac{\sigma_2 u\, \sigma_2 v\, \sigma_2 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad B = e^{-\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, \sigma\omega'',$$
$$\frac{z}{\rho} = C^2 \frac{\sigma_3 u\, \sigma_3 v\, \sigma_3 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad C = e^{-\frac{1}{2}\eta'\omega'}\, \sigma\omega'.$$
$$\omega'' = \omega + \omega', \qquad \eta'' = \eta + \eta'.$$

Quand on change le signe de l'un des arguments u, v, w, les trois coordonnées x, y, z changent de signe, et le point P est remplacé par son symétrique par rapport à l'origine.

Les formules (*voir* n° 48)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)} &= \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}, \\ \frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)} &= -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}, \end{aligned}\quad \begin{matrix}\lambda \\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2, 3,$$

où l'on suppose

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \omega + \omega', \qquad \omega_3 = \omega',$$

montrent que, quand on ajoute une période à l'un des arguments, on remplace le point P par son symétrique par rapport à l'un des axes.

V. — Application à la théorie de la chaleur.

204. Les surfaces homofocales à un ellipsoïde sont des surfaces isothermes. Chacun des arguments u, v, w est un paramètre thermométrique. — Si l'on considère les points d'un espace en équilibre de température, pour chaque point la température T est une fonction des coordonnées de ce point et l'on démontre que cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

On dit que les surfaces d'une famille sont des surfaces *isothermes* si la température est la même en tous les points de l'une de ces surfaces et ne dépend, par conséquent, que du paramètre qui détermine cette surface.

Il est facile de trouver la condition pour qu'une famille de surfaces représentées par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = \lambda,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre variable, soit composée de surfaces isothermes. En effet, si cela a lieu, la température T ne dépend des coordonnées x, y, z que par l'intermédiaire de λ. Calculons d'après cette remarque les dérivées de T pour les porter

dans l'équation $\Delta T = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{dT}{d\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2},$$

$$\Delta T = \frac{d^2 T}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{dT}{d\lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right).$$

Comme $\Delta T = 0$, on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}}{\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2} = -\frac{\dfrac{d^2 T}{d\lambda^2}}{\dfrac{dT}{d\lambda}}.$$

Ainsi la combinaison des dérivées de λ qui est dans le premier membre doit être une fonction de λ que nous appellerons $\psi(\lambda)$.

Si cette condition est satisfaite, pour calculer T il suffira d'intégrer l'équation

$$(2) \qquad -\frac{\dfrac{d^2 T}{d\lambda^2}}{\dfrac{dT}{d\lambda}} = \psi(\lambda).$$

Appliquons ce qui précède aux surfaces

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} - 1 = 0.$$

Nous poserons

$$\Phi(s) \equiv -\frac{x^2}{a^2-s} - \frac{y^2}{b^2-s} - \frac{z^2}{c^2-s} + 1,$$

$$f(s) \equiv (a^2-s)(b^2-s)(c^2-s).$$

Calculons d'abord $\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2$.

En différentiant par rapport à x la relation (3) qui définit λ en fonction de x, y, z, on trouve

$$(4) \qquad \left[\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}\right]\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{2x}{a^2-\lambda} = 0,$$

ou bien

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{a^2-\lambda},$$

et de même

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{2y}{b^2-\lambda},$$

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{2z}{c^2-\lambda}.$$

On tire de là

(5) $$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = -\frac{4}{\Phi'(\lambda)}.$$

Pour avoir $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$, différentions par rapport à x la relation (4) qui définit $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$; nous trouverons

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{4x}{(a^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{a^2-\lambda} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ par sa valeur,

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{8x^2}{(a^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{a^2-\lambda} = 0,$$

et de même

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{8y^2}{(b^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{b^2-\lambda} = 0,$$

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{8z^2}{(c^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 + \frac{2}{c^2-\lambda} = 0.$$

Si nous ajoutons membre à membre ces trois identités, les termes du milieu disparaissent et il vient

(6) $$\Phi'(\lambda)\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right) = -\frac{2f'(\lambda)}{f(\lambda)},$$

et comme nous avons déjà trouvé

$$\Phi'(\lambda)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right] = -4,$$

on a en définitive

(7) $$\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}}{\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2} = \frac{f'(\lambda)}{2f(\lambda)};$$

le second membre est une fonction de λ; les surfaces

$$\lambda = \text{const.}$$

sont donc des surfaces isothermes.

On peut alors déterminer une fonction de λ

$$u = \psi(\lambda),$$

de telle façon que $\Delta u = 0$. Pour avoir cette fonction u, que Lamé appelle le *paramètre thermométrique*, nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{\dfrac{d^2 u}{d\lambda^2}}{\dfrac{du}{d\lambda}} = -\frac{f'(\lambda)}{2f(\lambda)}.$$

En intégrant une première fois et en passant des logarithmes aux nombres, on trouve

$$(8) \qquad \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{f(\lambda)}}\frac{\rho}{2},$$

en désignant le facteur constant du second membre par $\frac{\rho}{2}$ pour simplifier l'écriture dans ce qui suit. Remplaçons $f(\lambda)$ par le produit de facteurs linéaires correspondants et intégrons entre $-\infty$ et λ, nous avons

$$u = \frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}};$$

λ est donc une fonction elliptique de u. Faisons comme au n° 203 le changement de variable et de notations

$$a^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_1),$$
$$b^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_2),$$
$$c^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_3),$$

la relation devient

$$u = \int_p^\infty \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} = \int_0^\upsilon d\upsilon.$$

On voit qu'elle est satisfaite si l'on pose

$$\upsilon = u;$$

λ est donc donné en fonction de u par l'égalité

$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \rho^2 p u.$$

On fera correspondre de la même manière un des arguments v et w aux *coordonnées* μ et ν.

Les surfaces représentées par les équations

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0,$$

dans lesquelles u_0, v_0, w_0 désignent des constantes, se coupent orthogonalement, puisque supposer, par exemple, que u a une valeur déterminée revient à fixer une valeur de λ.

On doit donc avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

et deux relations analogues.

Expression du ds^2 en fonction des arguments u, v, w. — Dans la formule trouvée au n° 202

$$4\,ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}\,d\lambda^2 + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}\,d\nu^2,$$

introduisons les éléments elliptiques : elle devient

$$\frac{ds^2}{\rho^2} = (pu-pv)(pu-pw)\,du^2 + (pv-pu)(pv-pw)\,dv^2 + (pw-pu)(pw-pv)\,dw^2.$$

203. Équation de la chaleur quand les variables sont les arguments u, v, w. — Dans l'équation

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

faisons le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z); \end{aligned}$$

si les fonctions φ, ψ, χ sont telles que les surfaces obtenues en donnant à u, v, w des valeurs constantes sont orthogonales et si l'on a

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi = 0, \qquad \Delta\chi = 0,$$

l'équation transformée sera

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0,$$

L, M, N étant définis par cette condition que la formule fournissant ds^2 est

$$ds^2 = L^2\,du^2 + M^2\,dv^2 + N^2\,dw^2.$$

Admettons, pour un instant, ce résultat et appliquons-le au cas où les nouvelles coordonnées sont les arguments elliptiques u, v, w. Nous trouverons pour l'équation transformée

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(pu - pv)(pu - pw)}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\\ &\quad + \frac{1}{(pv - pu)(pv - pw)}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{1}{(pw - pu)(pw - pv)}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0\end{aligned}$$

ou bien

$$(pv - pw)\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (pw - pu)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + (pu - pv)\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0.$$

Vérifions le résultat que nous venons d'admettre : on a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots,\\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots,\\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \ldots.\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces trois égalités, en se rappelant que les surfaces

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.}$$

sont orthogonales et que l'on a

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta w = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Delta T = \; & \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

et les deux expressions analogues se déduisent, comme on l'a annoncé, des coefficients du ds^2 exprimés en fonction de u, v, w. Or

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right],$$

ou, en remplaçant les deux facteurs du second membre par les expressions (5) et (8) trouvées au n° 204,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{\rho^2}{\Phi'(\lambda)}\,\frac{1}{(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}.$$

Mais, comme

$$\Phi(s) = \frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(s-a^2)(s-b^2)(s-c^2)},$$

on a

$$\Phi'(\lambda)(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2) = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2(pu - pv)(pu - pw)};$$

le facteur ρ^2 se retrouve dans les coefficients de $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial w^2}$. On a donc bien la forme annoncée.

Ainsi, quand on prend pour nouvelles coordonnées d'un point les arguments elliptiques u, v, w, l'équation

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

devient

$$(p v - p w)\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (p w - p u)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + (p u - p v)\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0.$$

206. **Solutions dépendant d'une équation de Lamé.** — Essayons de satisfaire à l'équation précédente en posant

$$T = F(u)F(v)F(w),$$

F désignant une fonction pour le moment inconnue; il vient

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p v - p w)\frac{d^2 F(u)}{du^2}F(v)F(w) \\ &+ (p w - p u)\frac{d^2 F(v)}{dv^2}F(w)F(u) \\ &+ (p u - p v)\frac{d^2 F(w)}{dw^2}F(u)F(v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or si nous supposons que $F(\upsilon)$ est une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{d\upsilon^2} = (A p\upsilon + B)z,$$

où A et B sont des constantes, nous avons

$$\frac{d^2 F(u)}{du^2} = (A p u + B)F(u),$$

$$\frac{d^2 F(v)}{dv^2} = (A p v + B)F(v),$$

$$\frac{d^2 F(w)}{dw^2} = (A p w + B)F(w),$$

et l'équation (9) se réduit à l'identité

$$\begin{aligned} 0 = F(u)F(v)F(w)[(p v - p w)(A p u + B) \\ + (p w - p u)(A p v + B) + (p u - p v)(A p w + B)]; \end{aligned}$$

par suite

$$\Delta T = 0.$$

Ainsi on peut construire une fonction T vérifiant l'équation $\Delta T = 0$, chaque fois que l'on connaît une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\upsilon^2} = (A p\upsilon + B)z,$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. Lamé a démontré qu'en

donnant à A une valeur de la forme $n(n+1)$, n entier, on peut intégrer l'équation au moyen des fonctions elliptiques pour des déterminations convenables de B. Il obtient ainsi, pour chaque valeur de l'entier n, des solutions particulières de l'équation $\Delta T = 0$, à l'aide desquelles il forme la solution générale de cette équation pour le problème que nous venons de traiter.

L'équation obtenue en faisant $A = n(n+1)$ s'appelle *équation de Lamé*. Nous reviendrons sur cette équation dans le Chapitre XI.

EXERCICE.

Quadrilatère articulé. — Soit un quadrilatère plan articulé dont les côtés ont pour longueurs a, b, c, d; appelons α, β, γ les angles des côtés a, b, c, parcourus dans un même sens de circulation, avec le côté d. En projetant le contour du quadrilatère sur le côté d et sur une perpendiculaire à ce côté, on a deux relations que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & ax + by + cz + d = 0, \\ & \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on pose

$$x = e^{\alpha i}, \qquad y = e^{\beta i}, \qquad z = e^{\gamma i}.$$

En regardant x, y, z comme des coordonnées courantes, on voit que la première des équations (1) représente un plan et la deuxième une surface du troisième ordre; leur ensemble représente donc une cubique plane. Les coordonnées d'un point de cette cubique pourront s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre u:

$$e^{\alpha i} = f(u), \qquad e^{\beta i} = \varphi(u), \qquad e^{\gamma i} = \psi(u).$$

En faisant varier u, on pourra étudier la déformation du quadrilatère.

Si le plan et la surface (1) sont tangents, la cubique devient unicursale et les fonctions f, φ, ψ peuvent être remplacées par des fonctions rationnelles. (Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*.)

CHAPITRE X.

TRANSFORMATION DE LANDEN.

207. **Division par deux de la période** 2ω. — Considérons les fonctions de Jacobi

$$H(u), \quad H_1(u), \quad \Theta(u), \quad \Theta_1(u),$$

construites avec les deux périodes 2ω, $2\omega'$, et en même temps les fonctions

$$H\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \quad H_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \quad \Theta\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \quad \Theta_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right),$$

construites avec les deux périodes ω et $2\omega'$. On a entre ces fonctions les relations suivantes, dans lesquelles A désigne un facteur constant :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} H\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= A\,H(u)\,H_1(u), \\ \Theta\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= A\,\Theta(u)\,\Theta_1(u), \\ H_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= A\,H_1\left(u + \frac{\omega}{2}\right) H_1\left(u - \frac{\omega}{2}\right), \\ \Theta_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= A\,\Theta_1\left(u + \frac{\omega}{2}\right) \Theta_1\left(u - \frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

La première de ces relations se démontre en remarquant que les fonctions

$$H\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) \quad \text{et} \quad H(u)H_1(u)$$

ont relativement aux périodes ω et $2\omega'$ les multiplicateurs définis par les égalités

$$f(u+\omega) = -f(u),$$

$$f(u+2\omega') = -e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(u+\omega')} f(u)$$

et admettent les mêmes zéros dans un parallélogramme des pé-

riodes : le rapport de ces deux fonctions est donc une constante.

Pour déduire les trois autres relations de celle qui donne $H\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ il suffit d'y changer successivement u en

$$u+\omega', \quad u+\frac{\omega}{2}, \quad u+\omega'+\frac{\omega}{2}.$$

On peut, également, vérifier les relations (1) en se servant des expressions de H, H_1, Θ, Θ_1 sous forme de produits infinis (n° 80).

208. **Relations entre les modules et les multiplicateurs.** — Soient k et g le module et le multiplicateur correspondant aux périodes 2ω, $2\omega'$; et soient k_1, g_1 le module et le multiplicateur correspondant aux périodes ω, $2\omega'$.

On a, d'après la définition du module et en tenant compte des relations (1),

$$\sqrt{k_1} = \frac{H_1\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\Theta_1\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \frac{H_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} = k\frac{\operatorname{cn}^2\frac{\omega}{2}}{\operatorname{dn}^2\frac{\omega}{2}}.$$

Mais si, dans les formules du n° 78, relatives à l'addition de la demi-période ω, on fait $u = -\frac{\omega}{2}$, on trouve

$$\Theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \Theta\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

on déduit de là successivement

$$\operatorname{dn}\frac{\omega}{2} = \sqrt{k'}, \qquad \operatorname{cn}\frac{\omega}{2} = \sqrt{k'}\operatorname{sn}\frac{\omega}{2}, \qquad \operatorname{sn}\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}.$$

D'après cela

$$\sqrt{k_1} = \frac{k}{1+k'} = \frac{\sqrt{1-k'^2}}{1+k'} = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}. \tag{2}$$

Cette relation peut encore s'écrire

$$1+k_1 = \frac{2}{1+k'}. \tag{2'}$$

D'après la définition même du multiplicateur (n° 94), on a

$$g = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)},$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{H'\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\Theta\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}.$$

La valeur de g_1 peut s'écrire successivement

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{H'(0) H_1(0)}{\Theta(0)\Theta_1(0)},$$

$$g_1 = g \frac{k}{\sqrt{k_1}},$$

et, en remplaçant k_1 par sa valeur tirée de (2), on trouve entre les multiplicateurs g et g_1 la relation suivante :

$$(3) \qquad g_1 = g(1 + k').$$

A partir de maintenant nous supposerons les quantités ω et $\frac{\omega'}{i}$ réelles.

209. Relations entre les intégrales K et K$_1$. — Posons

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi_1}}.$$

Nous avons déjà remarqué que de l'équation différentielle vérifiée par $z = \operatorname{sn}(u; k, g)$ (n° 93),

$$\frac{dz}{du} = g\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

on déduit

$$g\omega = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

ou bien

$$g\omega = K.$$

On obtiendrait de même

$$g_1 \frac{\omega}{2} = K_1,$$

et, en divisant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$\frac{K}{K_1} = 2\frac{g}{g_1} = \frac{2}{1+k'},$$

puis, en se reportant à la relation (2') entre les modules,

$$K = K_1(1+k_1).$$

210. Calcul de K quand k est donné. — Supposons le module k réel, et compris entre 0 et 1, par exemple; et concevons qu'on applique plusieurs fois la transformation précédente; on trouvera successivement

$$\begin{aligned} K &= K_1(1+k_1), \\ K_1 &= K_2(1+k_2), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ K_{n-1} &= K_n(1+k_n), \end{aligned}$$

puis, en multipliant membre à membre toutes ces égalités,

$$K = K_n(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n);$$

comme on a

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

on a aussi, quel que soit n,

$$\frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n) < K;$$

k_n est toujours positif; le produit qui est dans le premier membre va donc constamment en croissant quand n croît, et comme il est constamment inférieur à K, il tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Il en résulte que k_n tend vers zéro et par suite que K_n a pour limite $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$K = \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)\dots.$$

Cette formule est utile lorsque l'on veut calculer la valeur numérique de K, en supposant k donné. On la met sous une forme plus commode pour les calculs numériques en posant

$$k = \sin\theta,$$

ce qui donne, en se reportant à la formule (2),

$$k_1 = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 + k_1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

puis

$$k_1 = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \sin\theta_1, \qquad k_2 = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta_1}{2} = \sin\theta_2, \qquad \ldots;$$

on en déduit

$$1 + k_1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}, \qquad 1 + k_2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_1}, \qquad 1 + k_3 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_2}, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}} = \cos^2 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta_1 \cos^2 \frac{1}{2}\theta_2 \ldots.$$

(*Voir* Durège, *Theorie der elliptischen Functionen*, 4[e] éd., Leipzig, 1887, p. 204.)

Prenons comme exemple $k^2 = \frac{1}{2}$, $\theta = 45°$.

Dans ce Tableau de calcul, on a séparé par plusieurs points le nombre de son logarithme, de sorte que l'on a mis

$$\mathrm{N} \ldots\ldots \quad \text{au lieu de} \quad \operatorname{Log} \mathrm{N} = .$$

De plus, les logarithmes à caractéristique négative sont augmentés de 10 :

$\theta = 45°\ 0'0'',00$		$\theta_1 = 9°52'45'',41$		$\theta_2 = 0°25'40'',74$	
$\frac{1}{2}\theta = 22°30'0'',00$		$\frac{1}{2}\theta_1 = 4°56'22'',70$		$\frac{1}{2}\theta_2 = 0°12'50'',37$	
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$......	9,617 2243	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1$.....	8,936 6504.5	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_2$.....	7,572 2761.7
$\cos\frac{1}{2}\theta$.......	9,965 6153	$\cos\frac{1}{2}\theta_1$......	9,998 3840.1	$\cos\frac{1}{2}\theta_2$......	9,999 9970.0
$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta \\ \sin\theta_1\end{matrix}\right\}$...	9,234 4486	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 \\ \sin\theta_2\end{matrix}\right\}$..	7,873 3009.0	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 \\ \sin\theta_3\end{matrix}\right\}$..	5,144 5523.4

$$\theta_3 = 0°0'3'', \qquad \cos\theta_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,000\ 0000.$$

On a donc :

$\cos^2 \frac{1}{2}\theta$	9,931 2306.0
$\cos^2 \frac{1}{2}\theta_1$	9,996 7680.2
$\cos^2 \frac{1}{2}\theta_2$	9,999 9940.0
$\frac{\pi}{2K}$	9,927 9926.2
$\frac{\pi}{2}$	0,196 1198.7
K	0,268 1272.5

$$K = 1,854\ 0747.$$

211. Calcul de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

quand k et φ sont donnés. — Soit $z = \mathrm{sn}(u;\ k,\ g)$; on a

$$gu = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ou en posant

$$z = \sin\varphi,$$

$$gu = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

de sorte que, u et φ étant liés par la relation précédente, on a

$$\mathrm{sn}(u;\ k,\ g) = \sin\varphi;$$

on s'assure aisément que

$$\mathrm{cn}(u;\ k,\ g) = \cos\varphi$$

et

$$\mathrm{dn}(u;\ k,\ g) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Considérons en même temps $z_1 = \mathrm{sn}(u;\ k_1,\ g_1)$; en posant

$$g_1 u = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}},$$

on aura

$$\mathrm{sn}(u;\ k_1,\ g_1) = \sin\varphi_1.$$

Si maintenant k et g correspondent aux périodes 2ω, $2\omega'$ et si k_1 et g_1 correspondent de même aux périodes ω, $2\omega'$, on aura, comme nous l'avons vu,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{1+k_1}{2}.$$

Alors en prenant le rapport des intégrales dont les limites supérieures sont φ et φ_1, on trouve

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}},$$

et l'intégrale dont la limite supérieure est φ se trouvera ramenée à l'intégrale dont la limite supérieure est φ_1, quand nous aurons obtenu une relation finie entre φ et φ_1.

Cette relation, que l'on pourrait former par des considérations géométriques, nous sera utile sous la forme

$$\operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi) = k' \operatorname{tang}\varphi,$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi_1} = k'\operatorname{tang}\varphi,$$

ou encore

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{(1+k')\operatorname{tang}\varphi}{1-k'\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Pour vérifier cette dernière égalité il suffit de remarquer que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}_1(u)}$$

et de se reporter aux formules (1) du n° 207 donnant $\mathrm{H}\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ et $\mathrm{H}_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$; on trouve ainsi

$$\sqrt{k_1'}\operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{\mathrm{H}(u)\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}\left(u+\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(u-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Transformons le dénominateur du second membre d'après l'identité, facile à vérifier,

$$\mathrm{H}_1^2(0)\mathrm{H}\left(u+\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(u-\frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{H}_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}^2(u) - \mathrm{H}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}_1^2(u),$$

nous pourrons écrire

$$\sqrt{k'_1}\,\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{H(u)\,H_1(u)\,H_1^2(o)}{H^2\left(\frac{\omega}{2}\right)H_1^2(u) - H_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)H^2(u)},$$

ou en divisant les deux termes du second membre par $H^2\left(\frac{\omega}{2}\right)H_1^2(u)$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = C\,\frac{\operatorname{tang}\varphi}{1 - \dfrac{H_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\dfrac{H^2(u)}{H_1^2(u)}},$$

C désignant un facteur constant; pour déterminer ce facteur on divise les deux nombres par u et l'on fait ensuite tendre u vers zéro, ce qui donne

$$C = \frac{g_1}{g} = 1 + k'.$$

En tenant compte enfin de la formule (n° 208)

$$\frac{\operatorname{cn}^2\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{\omega}{2}} = k',$$

on a bien

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{(1+k')\operatorname{tang}\varphi}{1 - k'\operatorname{tang}^2\varphi}$$

ou encore

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi,$$

comme nous voulions le vérifier.

Cela posé, concevons qu'on applique plusieurs fois de suite la même transformation; en posant pour abréger, d'après Legendre,

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

nous aurons successivement

$$F(\varphi, k) = \frac{1+k_1}{2}F(\varphi_1, k_1),$$

$$F(\varphi_1, k_1) = \frac{1+k_2}{2}F(\varphi_2, k_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$F(\varphi_{n-1}, k_{n-1}) = \frac{1+k_n}{2}F(\varphi_n, k_n),$$

et en multipliant membre à membre ces égalités

$$F(\varphi, k) = \frac{(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)}{2^n} F(\varphi_n, k_n).$$

Supposons maintenant que n augmente indéfiniment, nous avons vu que k_n tend vers zéro et l'on en conclut

$$\lim F(\varphi_n, k_n) = \lim \varphi_n.$$

Comme d'autre part on a trouvé (n° 210)

$$\frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\ldots = K,$$

on voit que, en définitive,

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n}{2^n}.$$

Pour calculer successivement les angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots,$ nous aurons les formules

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tang}\varphi, && k_1 = \frac{1-k'}{1+k'},\\
&\operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tang}\varphi_1, && k_2 = \frac{1-k'_1}{1+k'_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\operatorname{tang}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = k'_{n-1} \operatorname{tang}\varphi_{n-1}, && k_n = \frac{1-k'_{n-1}}{1+k'_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Quand n est très grand, k_n est très petit, comme nous l'avons vu ; alors k'_{n-1} est très voisin de l'unité et l'on a sensiblement

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}$$

ou bien

$$\varphi_n = 2\varphi_{n-1};$$

alors

$$\frac{\varphi_n}{2^n} = \frac{\varphi_{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Donc, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, $\frac{\varphi_n}{2^n}$ reste sensiblement constant et l'on aperçoit ainsi que $\frac{\varphi_n}{2^n}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

Exemple numérique. — (Nous l'empruntons encore à la *Theorie der elliptischen Functionen* de Durège, p. 205.)

Soient

$$k^2 = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ$$

les valeurs données de k^2 et de φ.

Il résulte d'un calcul précédent que l'on a

$$\begin{aligned}
&\frac{2K}{\pi} \dots\dots\dots & 0,072\ 0073.8,\\
&k' = \cos\theta \dots & 9,849\ 4850,\\
&k'_1 = \cos\theta_1 \dots & 9,993\ 5118,\\
&k'_2 = \cos\theta_2 \dots & 9,999\ 9878.9,\\
&k'_3 = \cos\theta_3 \dots & 0,000\ 0000.0,
\end{aligned}$$

Voici maintenant le calcul des angles φ_1, φ_2, φ_3 :

$\varphi = 30^\circ$		$\varphi_1 = 52^\circ 12' 27'',56$		$\varphi_2 = 104^\circ 0' 0'',14$	
$\operatorname{tang}\varphi$	9,761 4394	$\operatorname{tang}\varphi_1$	0,110 4374.9	$\operatorname{tang}\varphi_2$	0,603 2276.5$_n$
k'	9,849 4850	k'_1	9,993 5118	k'_2	9,999 9878.9
$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi)$ ..	9,610 9244	$\operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1)$.	0,103 9492.9	$\operatorname{tang}(\varphi_3 - \varphi_2)$.	0,603 2155.4$_n$
$\varphi_1 - \varphi = 22^\circ 12' 27'',56$		$\varphi_2 - \varphi_1 = 51^\circ 47' 32'',58$		$\varphi_3 - \varphi_2 = 104^\circ 0' 1'',40$	
$\varphi_1 = 52^\circ 12' 27'',56$		$\varphi_2 = 104^\circ\ 0'\ 0'',14$		$\varphi_3 = 208^\circ 0' 1'',54$	

On prendra ici comme valeur approchée de $\lim \frac{\varphi_n}{2^n}$ le rapport

$$\frac{\varphi_3}{2^3} = \frac{1}{8}(208^\circ 0' 1'' 54) = 93\,600'',19.$$

Pour exprimer cet angle en parties de rayons on divise le nombre de secondes par 206 264,8 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\ 93\ 600'',19 &= 4,971\ 2767.9\\
\operatorname{Log} 206\ 264'',8 &= 5,314\ 4251.3\\
\hline
&\ 9,656\ 8515.7\\
\operatorname{Log}\frac{2K}{\pi} &= 0,072\ 0073.8\\
\hline
\operatorname{Log} F(\varphi, k) &= 9,728\ 8589.5
\end{aligned}$$

$$F(\varphi, k) = 0,535\ 6221 \quad \text{pour} \quad \varphi = 30^\circ \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Remarque. — Lorsque le module est devenu très petit le calcul des modules suivants peut se simplifier. (*Voir* J. Bertrand, *Calcul intégral*, p. 661.)

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X.

Division de la période 2ω par un nombre impair n. — 1. En posant avec Jacobi [n° 83] $\mathfrak{I}(x) = \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ vérifier l'identité

$$\mathfrak{I}(x)\,\mathfrak{I}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\mathfrak{I}\left[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = C\,\mathfrak{I}(nx,\, q^n),$$

où l'on suppose que, $\mathfrak{I}(x)$ correspondant aux périodes 2ω et $2\omega'$, $\mathfrak{I}(x,\, q^n)$ correspond aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$, et où C désigne un facteur constant.

(On peut remarquer que le premier membre d'une part et $\mathfrak{I}(nx,\, q^n)$ d'autre part sont deux fonctions qui admettent les mêmes multiplicateurs pour les périodes 2ω, $2\omega'$ et qui ont les mêmes zéros dans un parallélogramme des périodes.)

On a une vérification intéressante de l'identité précédente en considérant le produit infini qui donne $\mathfrak{I}(nx,\, q^n)$, savoir

$$\begin{aligned} C\,\mathfrak{I}(nx,\, q^n) &= (1 - 2q^n \cos 2nx + q^{2n}) \\ &\quad \times (1 - 2q^{3n}\cos 2nx + q^{6n})(1 - 2q^{5n}\cos 2nx + q^{10n})\ldots, \end{aligned}$$

et décomposant chaque facteur de ce produit d'après l'identité suivante (théorème de Cotes)

$$1 - 2q^n\cos 2nx + q^{2n} = \prod_r \left[1 - 2q\cos 2\left(x+\frac{r\pi}{n}\right) + q^2\right]$$

pour

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

ou, ce qui revient au même puisque n est impair,

$$\frac{r}{2} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

D'après cette vérification, l'identité résulte de ce que, dans un produit infini absolument convergent, on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué et réciproquement.

2. Vérifier la formule

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathfrak{I}_1(x)\,\mathfrak{I}_1\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\,\mathfrak{I}_1\left[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = C'\,\mathfrak{I}_1(nx,\, q^n),$$

où $\mathfrak{I}_1(x)$ désigne la fonction $\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)$, C′ une constante et n un nombre impair; de plus, $\mathfrak{I}_1(x)$ correspondant aux périodes 2ω et $2\omega'$, $\mathfrak{I}_1(nx, q^n)$ correspond aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$.

3. Des formules des deux exercices précédents déduire la suivante :

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2n\mathrm{K}^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) = \mathrm{C}\operatorname{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}x\operatorname{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\left[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right],$$

où l'on suppose que $k^{(n)}$ et $\mathrm{K}^{(n)}$ correspondent aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$ comme k et K correspondent à 2ω et $2\omega'$ et où C a la valeur constante

$$\mathrm{C} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{k^{(n)}}}.$$

4. **Division de la période** 2ω **par le nombre** 2. (Notation de Weierstrass.) — Établir la formule

$$p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = pu + p(u-\omega) - p\omega = pu + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pu-e_1}.$$

(où les symboles p sans indication de périodes sont construits avec le couple primitif 2ω, $2\omega'$).

CHAPITRE XI.

FONCTIONS A MULTIPLICATEURS CONSTANTS OU FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE.

212. **Définitions.** — Rappelons d'abord qu'une fonction $f(u)$ est dite *méromorphe* (nº 4) quand elle est uniforme en u et n'admet, à distance finie, aucune autre singularité que des pôles. Or, dans plusieurs questions de Mécanique et de Physique mathématique, on est conduit à étudier des fonctions méromorphes en u et se reproduisant *multipliées* par des *constantes* μ ou μ' quand on ajoute à u l'une ou l'autre des périodes 2ω et $2\omega'$ (dont le rapport $\omega' : \omega$ est imaginaire). L'une quelconque de ces fonctions $F(u)$ vérifie donc deux relations de la forme

$$F(u+2\omega) = \mu F(u), \qquad F(u+2\omega') = \mu' F(u).$$

Hermite, qui a fait l'étude des fonctions de cette nature (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, 1885; *Œuvres*, t. III, p. 266), leur a donné le nom de *fonctions doublement périodiques de deuxième espèce;* ces fonctions se réduisent aux fonctions doublement périodiques ordinaires ou fonctions elliptiques, quand les deux multiplicateurs constants μ et μ' se réduisent à l'unité. Quand les multiplicateurs μ et μ' seront donnés, nous appellerons les fonctions telles que $F(u)$, *fonctions aux multiplicateurs constants* μ et μ'; les fonctions elliptiques sont alors des fonctions aux multiplicateurs 1 et 1.

Les relations

$$\begin{aligned} F(u+2\omega) &= \mu F(u), \\ F(u+2\omega') &= \mu' F(u) \end{aligned}$$

entraînent évidemment la suivante où m et n sont des entiers positifs, négatifs ou nuls :

$$F(u+2m\omega+2n\omega') = \mu^m \mu'^n F(u).$$

Il en résulte que, si la fonction $F(u)$ admet un pôle $u = a$, elle admet comme pôles, au même degré de multiplicité, tous les points homologues

$$a_{m,n} = a + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Si le résidu relatif au pôle a est A, le résidu relatif au pôle $a_{m,n}$ est $\mu^m \mu'^n A$. De même, si la fonction $F(u)$ admet un zéro $u = b$, elle admet comme zéros, avec le même ordre de multiplicité, tous les points homologues.

Exemples. — Voici quelques exemples de ces nouvelles fonctions. Soient A, α et λ des constantes; la fonction

$$f(u) = A \frac{H(u-\alpha)}{H(u)} e^{\lambda u}$$

est une fonction aux multiplicateurs

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \quad \mu' = e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega} + 2\lambda\omega'}.$$

En effet, les relations fondamentales

$$\begin{aligned} H(u+2\omega) &= -H(u), \\ H(u+2\omega') &= -H(u)\, e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')} \end{aligned}$$

donnent les suivantes :

$$\begin{aligned} f(u+2\omega) &= f(u)\, e^{2\lambda\omega}, \\ f(u+2\omega') &= f(u)\, e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega} + 2\lambda\omega'}, \end{aligned}$$

La théorie du pendule sphérique nous fournit un autre exemple de ce genre de fonctions. Nous avons trouvé, en effet, pour $x + iy$ une expression de la forme suivante (p. 100) :

$$\varphi(u) = A \frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u} e^{\lambda u},$$

A, a, b, λ désignant des constantes. Or, d'après les relations fondamentales

$$\begin{aligned} \sigma(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') &= -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u, \end{aligned}$$

cette fonction φ vérifie les relations

$$\begin{aligned} \varphi(u+2\omega) &= e^{2\eta(a-b)+2\lambda\omega}\varphi(u), \\ \varphi(u+2\omega') &= e^{2\eta'(a-b)+2\lambda\omega'}\varphi(u); \end{aligned}$$

c'est donc une fonction aux multiplicateurs constants

$$\mu = e^{2\eta(a-b)+2\lambda\omega},$$
$$\mu' = e^{2\eta'(a-b)+2\lambda\omega'}.$$

Dans la théorie que nous allons développer, nous supposerons les multiplicateurs μ et μ' donnés et nous formerons les expressions analytiques des fonctions qui admettent ces multiplicateurs. Hermite a indiqué, pour ces fonctions, deux formes principales correspondant aux deux formes fondamentales des fonctions elliptiques.

L'une de ces formes donne la fonction comme le quotient de deux produits de fonctions H ou σ : elle met en évidence les zéros et les pôles de la fonction. L'autre forme est analogue à la formule de décomposition en éléments simples; elle met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes.

Les seuls éléments analytiques nécessaires pour cette théorie sont les fonctions H ou σ.

I. — Décomposition en facteurs. Conséquences.

213. **Expression générale des fonctions à multiplicateurs constants.** — Soit $F(u)$ une fonction aux *multiplicateurs constants donnés* μ et μ'. Par hypothèse, cette fonction est méromorphe et vérifie les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} F(u+2\omega) = \mu F(u), \\ F(u+2\omega') = \mu' F(u), \end{cases}$$

où le rapport $\omega' : \omega$ est supposé imaginaire.

Pour obtenir une première expression de la fonction $F(u)$ remarquons que la fonction particulière

$$(2)\qquad f(u) = A\,\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\,e^{\lambda u},$$

considérée dans le numéro précédent, vérifie les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} f(u+2\omega) = \mu f(u), \\ f(u+2\omega') = \mu' f(u), \end{cases}$$

où

$$(4)\qquad \mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega}+2\lambda\omega'}$$

On peut toujours disposer des constantes λ et α de façon à faire prendre à ces multiplicateurs des valeurs *données* à l'avance. En effet, μ et μ' étant donnés, on a

$$(5)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2\omega}\operatorname{Log}\mu, \\ \alpha = \dfrac{1}{i\pi}(\omega\operatorname{Log}\mu' - \omega'\operatorname{Log}\mu), \end{cases}$$

$\operatorname{Log}\mu$ ayant la même détermination dans les deux équations.

Avec ce choix des constantes λ et α, on a, par la formule (2), une fonction particulière $f(u)$ aux multiplicateurs donnés μ et μ'. Mais alors, si l'on revient à la fonction générale $F(u)$ aux mêmes multiplicateurs, et si l'on observe que $\omega' : \omega$ est imaginaire, on peut dire que

$$(6)\qquad \Phi(u) = \frac{F(u)}{f(u)}$$

est une *fonction elliptique* aux périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, quand u augmente de l'une de ces périodes, F et f se reproduisent multipliées par le même facteur et $\Phi(u)$ ne change pas.

On obtient ainsi une première expression générale des fonctions aux multiplicateurs constants μ et μ', en prenant

$$F(u) = A\, e^{\lambda u}\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\Phi(u),$$

les constantes λ et α étant déterminées par les relations (5) et $\Phi(u)$ désignant une fonction elliptique aux périodes 2ω et $2\omega'$.

214. Décomposition en facteurs. — La formule de décomposition en facteurs se déduit immédiatement de ce résultat. En effet, la fonction elliptique $\Phi(u)$ peut se mettre sous la forme suivante (n° 40) :

$$\Phi(u) = A'\frac{H(u-b_1)H(u-b_2)\dots H(u-b_r)}{H(u-a_1)H(u-a_2)\dots H(u-a_r)},$$

avec la condition

$$(7)\qquad b_1 + b_2 + \dots + b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r.$$

La fonction aux multiplicateurs constants μ et μ' peut donc

s'écrire

$$(8) \qquad F(u) = B\, e^{\lambda u} \frac{H(u-\alpha)\, H(u-b_1)\dots H(u-b_r)}{H(u)\, H(u-a_1)\dots H(u-a_r)}.$$

Telle est la formule de décomposition en facteurs. Elle conduit aux conséquences suivantes :

1° *Une fonction à multiplicateurs constants possède, dans un parallélogramme des périodes, autant de zéros que d'infinis.* Cela résulte de ce que, dans la formule (8) ci-dessus, il entre autant de fonctions H au numérateur qu'au dénominateur.

2° *Si l'on considère, d'une part les zéros, d'autre part les infinis que possède une fonction aux multiplicateurs* μ *et* μ' *dans un parallélogramme des périodes, la différence entre la somme de ces zéros et la somme de ces infinis est égale à*

$$\frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu),$$

à des multiples des périodes près.

En effet, la fonction $F(u)$ définie par la formule (8) a, dans un parallélogramme des périodes, des infinis homologues des points

$$0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_r,$$

et des zéros homologues des points

$$\alpha, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_r.$$

La différence entre la somme des zéros et celle des infinis est donc

$$(9) \qquad \alpha + b_1 + b_2 + \dots + b_r - (a_1 + a_2 + \dots + a_r) + 2m\omega + 2n\omega';$$

si l'on tient compte de la relation

$$b_1 + b_2 + \dots + b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r,$$

et de la valeur (5) de α, on voit que la différence considérée (9) est

$$\frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu) + 2m\omega + 2n\omega',$$

ce qui démontre le théorème.

Changer les déterminations choisies pour $\operatorname{Log}\mu'$ et $\operatorname{Log}\mu$ revient à modifier les entiers m et n. On pourrait, par exemple, choisir les déterminations des deux logarithmes de façon à annuler m et n.

Remarque. — Il est évident que la fonction $F(u)$ donnée par la formule (8) n'admet pas nécessairement, d'une manière effective, le pôle $u=0$: car un des zéros $b_1, b_2, \ldots, b_r$ peut être égal à 0 ou homologue de 0. De même, cette fonction n'admet pas nécessairement le zéro α.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer admettent la réciproque suivante :

3° *Si l'on considère une expression de la forme*

$$F(u) = B\, e^{\lambda u} \frac{H(u-b)\, H(u-b_1) \ldots H(u-b_r)}{H(u-a)\, H(u-a_1) \ldots H(u-a_r)},$$

dans laquelle les constantes $\lambda, a, a_1, \ldots, a_r\ b, b_1, \ldots, b_r$ *vérifient les deux relations*

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2\omega} \operatorname{Log}\mu, \\ b + b_1 + \ldots + b_r - (a + a_1 + \ldots + a_r) &= \frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu), \end{aligned}\right.$$

cette expression $F(u)$ *définit une fonction aux multiplicateurs* μ et μ'. C'est ce qu'on vérifie immédiatement en partant des relations fondamentales

$$H(u+2\omega) = -H(u),$$
$$H(u+2\omega') = -H(u)\, e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')}.$$

Quand les multiplicateurs μ et μ' sont égaux à 1, la fonction $F(u)$ devient une fonction elliptique, et la deuxième des relations (10) exprime alors le théorème de Liouville (n° 39).

215. Nombre minimum de pôles d'une fonction à multiplicateurs constants. — Nous avons vu qu'une fonction elliptique a, au moins, deux pôles simples ou un pôle double dans un parallélogramme des périodes. Il en est autrement pour les fonctions à multiplicateurs constants.

Quand les multiplicateurs μ et μ' sont quelconques et ne vérifient pas la relation

$$\frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu) = 0, \tag{11}$$

pour des déterminations convenables des logarithmes, toute fonction aux multiplicateurs μ et μ' admet au moins un pôle simple dans un parallélogramme des périodes.

En effet, si la fonction $F(u)$ donnée par la formule générale (8) n'avait pas de pôles, elle n'aurait pas de zéros (n° 214, 1°), et cette fonction se réduirait à la fonction

$$F(u) = B\, e^{\lambda u},$$

dont les multiplicateurs

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \quad \mu' = e^{2\lambda\omega'}$$

vérifient la relation (11) que nous avons écartée.

Il y a donc au moins un pôle. D'ailleurs, il existe des fonctions avec un seul pôle dans un parallélogramme de périodes. Telle est, par exemple, la fonction déjà considérée

$$f(u) = A\,\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\,e^{\lambda u},$$

où λ et α sont déterminés par les équations (5). Cette fonction a, comme pôles, le point $u = 0$ et les points homologues. Telle est encore la fonction

$$f(u-v) = A\,\frac{H(u-v-\alpha)}{H(u-v)}\,e^{\lambda(u-v)},$$

où v est une constante quelconque; cette fonction admet, comme pôles, le point $u = v$ et les points homologues.

216. **Fonctions à multiplicateurs spéciaux.** — Nous dirons que les multiplicateurs μ et μ' sont *spéciaux* quand ils vérifient une relation de la forme

$$\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu = 0,$$

pour une détermination convenable des logarithmes. Dans ce cas, il existe une fonction *partout finie* dans un parallélogramme des

périodes et admettant les deux multiplicateurs : cette fonction est

$$\mathrm{A}\, e^{\lambda u},$$

λ étant déterminé par les deux relations compatibles

$$\lambda = \frac{\operatorname{Log} \mu}{2\omega} = \frac{\operatorname{Log} \mu'}{2\omega'}.$$

La fonction la plus générale $\mathrm{F}(u)$ aux multiplicateurs spéciaux μ et μ' est alors

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{A}\, e^{\lambda u} \Phi(u),$$

$\Phi(u)$ désignant une *fonction elliptique*. Une fonction elliptique, non réduite à une constante, a au moins deux pôles simples ou un pôle double dans un parallélogramme; donc, si la fonction $\mathrm{F}(u)$ ne se réduit pas à une simple exponentielle $\mathrm{A}\, e^{\lambda u}$, elle admet dans un parallélogramme au moins deux pôles simples ou un pôle double. Telles sont les fonctions

$$e^{\lambda u} \operatorname{sn}^2 u, \quad e^{\lambda u}[\mathrm{Z}(u-a) - \mathrm{Z}(u-b)],$$

II. — Décomposition en éléments simples.

217. Élément simple. — Reprenons la fonction

$$f(u) = \mathrm{A} \frac{\mathrm{H}(u-\alpha)}{\mathrm{H}(u)} e^{\lambda u},$$

les constantes λ et α étant déterminées par les équations

$$\lambda = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Log} \mu,$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}(\omega \operatorname{Log} \mu' - \omega' \operatorname{Log} \mu).$$

Écartons le cas des multiplicateurs spéciaux étudié dans le dernier numéro. Alors α n'est pas homologue de zéro et la fonction $f(u)$ devient effectivement infinie au point $u = 0$ et aux points homologues. Déterminons la constante A de telle façon que le résidu de $f(u)$ relatif au pôle $u = 0$ soit égal à 1. Pour cela, il suffit d'écrire que le produit $uf(u)$ est égal à 1 pour $u = 0$. On a ainsi

$$1 = -\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{H}(\alpha)}{\mathrm{H}'(0)}, \qquad \mathrm{A} = -\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(\alpha)}.$$

et la fonction $f(u)$ devient

$$f(u) = -\frac{H'(0)\,H(u-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u)}\,e^{\lambda u}. \tag{12}$$

Cette fonction $f(u)$ constitue l'élément simple introduit par Hermite pour obtenir la deuxième expression générale des fonctions aux multiplicateurs μ et μ'. Elle vérifie les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} f(u+2\omega) &= \mu f(u),\\ f(u+2\omega') &= \mu' f(u); \end{aligned}\right. \tag{13}$$

elle admet comme pôle simple le point $u=0$ et les points homologues. Au point $u=0$ son résidu est 1 ; au point $u=2m\omega+2n\omega'$, m et n étant des entiers quelconques, son résidu est $\mu^m\mu'^n$, comme il résulte de l'équation

$$f(u+2m\omega+2n\omega') = \mu^m\mu'^n f(u),$$

conséquence immédiate des relations (13). Si dans ces relations on change u en $u-v$, v désignant une quantité quelconque indépendante de u, on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} f(u-v+2\omega) &= \mu f(u-v),\\ f(u-v+2\omega') &= \mu' f(u-v). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

La fonction

$$f(u-v) = -\frac{H'(0)\,H(u-v-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u-v)}\,e^{\lambda(u-v)}, \tag{15}$$

regardée comme fonction de u, a donc les mêmes multiplicateurs μ et μ' que $f(u)$: elle admet comme pôles simples le point $u=v$ et les points homologues, le point $u=v$ avec le résidu $+1$.

Il est intéressant de voir quelles sont les propriétés de cette même fonction $f(u-v)$ considérée comme fonction de v. Si dans les relations (14) on change u en $u-2\omega$ on obtient deux nouvelles relations que nous écrirons comme il suit :

$$f(u-v-2\omega) = \frac{1}{\mu} f(u-v),$$

$$f(u-v-2\omega') = \frac{1}{\mu'} f(u-v).$$

Ces relations montrent que $f(u-v)$ *considérée comme fonction de v est une fonction aux multiplicateurs inverses* $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{\mu'}$. Cette

fonction de v admet comme pôles simples le point $v = u$ et les points homologues, le point $v = u$ avec le résidu -1. On vérifie, en effet, immédiatement, que le produit $(v - u)f(u - v)$ tend vers -1 quand v tend vers u.

218. **Formule de décomposition. Cas des pôles simples.** — Soit une fonction $F(u)$ aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ'. Supposons d'abord que cette fonction n'ait que des pôles simples homologues respectivement de certains points

$$u = a, \qquad u = b, \quad \ldots, \quad u = l,$$

et soient

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L$$

les résidus de $F(u)$ aux points $a, b, \ldots, l$.

Considérons la différence

$$\Psi(u) = F(u) - A f(u - a) - B f(u - b) - \ldots - L f(u - l).$$

Nous allons montrer que cette différence est *identiquement nulle*. En effet, $\Psi(u)$ est une fonction aux multiplicateurs μ et μ', car elle est une somme de fonctions $F(u)$, $-A f(u - a)$, $\ldots$ admettant séparément ces multiplicateurs. En outre, cette fonction $\Psi(u)$ est *finie* pour toutes les valeurs de u, car, dans le voisinage de $u = a$, par exemple, on a, par hypothèse,

$$F(u) = \frac{A}{u - a} + \text{fonction holomorphe};$$

de plus, d'après les propriétés de la fonction $f(u - v)$, on a, dans le voisinage de $u = a$,

$$f(u) = \frac{1}{u - a} + \text{fonction holomorphe};$$

enfin les autres termes $f(u - b)$, $\ldots$, $f(u - l)$ sont des fonctions holomorphes au point $u = a$. Dans la combinaison qui donne $\Psi(u)$ les termes en $\dfrac{1}{u - a}$ disparaissent et $\Psi(u)$ est finie pour $u = a$. Il en est de même des autres points $u = b$, $\ldots$, $u = l$ et des points homologues.

Ainsi $\Psi(u)$ est une fonction aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ' *n'admettant plus aucun pôle* à distance finie. Mais une

telle fonction ne peut pas exister (n° 215) : donc $\Psi(u)$ est *identiquement nulle*. On a alors la formule

$$(16) \qquad F(u) = A f(u-a) + B f(u-b) + \ldots + L f(u-l).$$

C'est la formule de décomposition en éléments simples, mettant en évidence les pôles non homologues a, b, ..., l et les résidus correspondants. Chaque terme de cette formule est une fonction de u aux multiplicateurs μ et μ' admettant dans un parallélogramme un seul pôle simple.

Inversement, toute expression de la forme (16), dans laquelle a, b, ..., l sont des points non homologues deux à deux et A, B, ..., L des constantes quelconques, est une fonction aux multiplicateurs μ et μ', ayant comme pôles les points a, b, ..., l et leurs homologues, les résidus relatifs aux points a, b, ..., l étant A, B, ..., L.

D'après cela, on peut choisir arbitrairement les résidus A, B, ..., L : il n'existe entre eux aucune relation nécessaire. Il y a donc là une différence avec les fonctions elliptiques pour lesquelles la somme des résidus est nulle.

Exemple de décomposition. — Soit

$$(17) \qquad F(u) = \frac{H^2(u)}{H(u-a)\,H(u-b)},$$

a et b étant deux constantes non homologues entre elles et non homologues de o. Cette fonction admet les multiplicateurs

$$\mu = 1, \qquad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(a+b)},$$

comme il résulte des propriétés fondamentales de la fonction H : elle admet comme pôles les points a et b et les points homologues.

Construisons l'élément simple correspondant

$$f(u) = -\frac{H'(0)\,H(u-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u)}\,e^{\lambda u},$$

en choisissant λ et α de façon que cette fonction admette les mêmes multiplicateurs μ et μ'. Il suffit de prendre

$$\lambda = 0, \qquad \alpha = -(a+b);$$

l'élément simple est donc

$$f(u) = \frac{H'(0)\,H(u+a+b)}{H(a+b)\,H(u)}.$$

Les résidus de la fonction à décomposer $F(u)$, relatifs aux deux pôles non homologues a et b, sont

$$A = \frac{H^2(a)}{H'(o)\,H(a-b)}, \qquad B = \frac{H^2(b)}{H'(o)\,H(b-a)};$$

pour les obtenir, il suffit de chercher les limites des deux produits $(u-a)F(u)$ et $(u-b)\,F(u)$ pour $u=a$ et $u=b$.

La formule de décomposition est donc

$$F(u) = A f(u-a) + B f(u-b)$$

ou, en écrivant tous les termes explicitement,

$$\begin{aligned}&\frac{H^2(u)}{H(u-a)\,H(u-b)}\\ &\quad = \frac{1}{H(a+b)\,H(a-b)}\left[\frac{H^2(a)\,H(u+b)}{H(u-a)} - \frac{H^2(b)\,H(u+a)}{H(u-b)}\right].\end{aligned}$$

219. Cas des pôles multiples. — Le même raisonnement nous donnera la formule dans le cas des pôles multiples. Supposons que la fonction $F(u)$ aux multiplicateurs *non spéciaux* μ et μ' admette comme pôles les points a, b, ..., l non homologues; et supposons que les parties principales relatives à ces pôles soient respectivement

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) &= \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A_2}{(u-a)^3} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},\\ \varphi_2(u) &= \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \frac{B_2}{(u-b)^3} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si l'on désigne par f', f'', ... les dérivées successives de $f(u)$, la différence

$$\begin{aligned}\Psi(u) = F(u) &- \Big[A f(u-a) - A_1 f'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} f''(u-a)\\ &\qquad + (-1)^{\alpha-1}\frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} f^{(\alpha-1)}(u-a)\Big]\\ &- \Big[B f(u-b) - B_1 f'(u-b) + \frac{B_2}{1.2} f''(u-b)\\ &\qquad + (-1)^{\beta-1}\frac{B_{\beta-1}}{1.2\ldots(\beta-1)} f^{(\beta-1)}(u-b)\Big]\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

est encore *identiquement nulle :* en effet, dans le voisinage de

$u = a$ par exemple, on a

$$f(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

$$f'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \text{fonction holomorphe},$$

$$f''(u-a) = \frac{1.2}{(u-a)^3} + \text{fonction holomorphe},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(\alpha-1)}(u-a) = (-1)^{\alpha-1}\frac{1.2\dots(\alpha-1)}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction holomorphe}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}f(u-a) - \mathrm{A}_1 f'(u-a) + \frac{\mathrm{A}_2}{1.2} f''(u-a) + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha-1}\mathrm{A}_{\alpha-1}}{1.2\dots(\alpha-1)} f^{(\alpha-1)}(u-a) = \varphi_1(u) + \text{fonction holomorphe}. \end{aligned}$$

Comme dans le voisinage de $u = a$, on a aussi, par hypothèse,

$$\mathrm{F}(u) = \varphi_1(u) + \text{fonction holomorphe};$$

on voit que $\Psi(u)$ est holomorphe au point a; il en est de même des autres points $b, \dots, l$ et des points homologues. Cette différence $\Psi(u)$ est donc une fonction aux multiplicateurs *non spéciaux* μ *et* μ' *n'ayant plus aucun pôle à distance finie*. Comme une telle fonction ne peut pas exister (n° 215), $\Psi(u)$ est identiquement nulle et l'on a la formule de décomposition

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(u) = \sum \Big[&\mathrm{A}f(u-a) - \mathrm{A}_1 f'(u-a) + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha-1}}{1.2\dots\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(u-a)\Big], \end{aligned}\right.$$

la somme étant étendue à tous les pôles non homologues.

Réciproquement, toute expression de cette forme, dans laquelle les coefficients $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{\alpha-1}, \dots$ sont choisis arbitrairement, est une fonction aux multiplicateurs μ et μ'.

On voit l'analogie de cette formule avec celle qu'Hermite a donnée pour les fonctions elliptiques et que nous avons établie au n° 26 par un raisonnement presque identique.

Exemple. — Prenons, par exemple, la fonction (17) de la page 372, en y faisant $b = a$:

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\mathrm{H}^2(u)}{\mathrm{H}^2(u-a)}.$$

Cette fonction admet les multiplicateurs

$$\mu = 1, \qquad \mu' = e^{-\frac{2i\pi a}{\omega}};$$

elle a comme unique pôle double le point $u = a$ et les points homologues. Dans le voisinage du point $u = a$, on a, par la formule de Taylor,

$$H(u) = H(a) + (u-a)H'(a) + \ldots,$$

$$H(u-a) = (u-a)H'(0) + \frac{(u-a)^3}{1.2.3}H'''(0) + \ldots,$$

car $H(u)$ étant impaire, $H(0)$, $H''(0)$ sont nulles. Donc

$$\frac{H(u)}{H(u-a)} = \frac{1}{(u-a)H'(0)} \frac{H(a) + (u-a)H'(a) + \ldots}{1 + \frac{(u-a)^2}{6}\frac{H'''(0)}{H'(0)} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{(u-a)H'(0)}[H(a) + (u-a)H'(a) + \ldots].$$

En élevant au carré, on a enfin

$$\frac{H^2(u)}{H^2(u-a)} = \frac{1}{(u-a)^2}\frac{H^2(a)}{H'^2(0)} + \frac{2}{(u-a)}\frac{H(a)H'(a)}{H'^2(0)} + \ldots;$$

les termes non écrits formant une fonction holomorphe au point a. On a ainsi mis en évidence la partie principale de $F(u)$ au pôle a. L'élément simple avec les multiplicateurs μ et μ' est actuellement

$$f(u) = \frac{H'(0)H(u+2a)}{H(2a)H(u)};$$

La formule de décomposition est enfin

$$F(u) = \frac{2H(a)H'(a)}{H'^2(0)}f(u-a) - \frac{H^2(a)}{H'^2(0)}f'(u-a).$$

220. Méthode d'Hermite. — Pour établir la formule de décomposition, nous avons suivi une marche analogue à celle que nous avons employée pour les fonctions elliptiques (n^os^ 24 et 26). Hermite établit cette formule par la méthode suivante, que nous indiquons à titre d'exercice :

Soit $F(u)$ une fonction aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ'; désignons par v une variable auxiliaire et considérons la fonction de v

$$\Phi(v) = F(v)f(u-v).$$

Cette fonction est *doublement périodique :* car, si l'on augmente v de l'une des périodes, $F(v)$ se reproduit multiplié par μ ou μ' et $f(u-v)$ multiplié par $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{\mu'}$; donc le produit $\Phi(v)$ ne change pas. La fonction $\Phi(v)$ est donc une fonction elliptique. En écrivant que la somme des résidus de $\Phi(v)$ relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme ou, ce qui revient au même, relatifs aux pôles non homologues, est nulle (n° 25), on obtiendra la formule cherchée.

Les infinis de $\Phi(v)$ sont les infinis des deux facteurs $F(v)$ et $f(u-v)$: les infinis de $F(v)$ sont homologues des points

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l;$$

ceux de $f(u-v)$ sont homologues du point u. Supposons, pour simplifier, les pôles de $F(v)$ simples et soient A, B, ..., L les résidus de F correspondant aux pôles a, b, ..., l. Les résidus de $\Phi(v)$, relatifs à ces pôles, sont

$$A f(u-a), \quad B f(u-b), \quad \ldots, \quad L f(u-l).$$

Le résidu de $\Phi(v)$, relatif au pôle $v=u$, est

$$-F(u).$$

Écrivant que la somme de ces résidus est nulle, on a bien la formule cherchée.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer la même méthode au cas des pôles multiples.

221. **Multiplicateurs spéciaux.** — Dans ce qui précède, nous avons écarté le cas où les multiplicateurs μ et μ' vérifieraient, pour des déterminations convenables de $\operatorname{Log}\mu$ et $\operatorname{Log}\mu'$, la relation

$$\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu = 0.$$

Supposons maintenant cette relation remplie : il existe alors une exponentielle de la forme

$$e^{\lambda u}$$

admettant ces deux multiplicateurs, car les deux équations

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{2\lambda\omega'}$$

donnent pour λ des valeurs compatibles. Cette fonction

$$e^{\lambda u}$$

est une fonction n'ayant aucun pôle à distance finie. L'élément simple appelé $f(u)$ n'existe plus dans ce cas, car la constante α est homologue du point o. Donc les formules de décomposition générale ne s'appliquent pas à ce cas.

Mais, actuellement, toute fonction $F(u)$ aux multiplicateurs spéciaux μ et μ' peut s'écrire

$$F(u) = e^{\lambda u}\Phi(u),$$

$\Phi(u)$ étant une fonction elliptique. Il suffira de décomposer cette fonction $\Phi(u)$ en éléments simples par les formules des n^os^ 24 et 26, et il en résultera une formule donnant $F(u)$. Par exemple, supposons que $F(u)$ ait seulement des pôles simples homologues des points

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$

les résidus des points $a, b, \ldots, l$ étant

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L.$$

La fonction elliptique

$$\Phi(u) = e^{-\lambda u}F(u)$$

admet les mêmes pôles avec les résidus

$$e^{-\lambda a}A, \quad e^{-\lambda b}B, \quad \ldots, \quad e^{-\lambda l}L.$$

On a donc, d'après la formule (31) du n° 24,

$$\Phi(u) = C_0 + e^{-\lambda a}A\,Z(u-a) + e^{-\lambda b}B\,Z(u-b) + \ldots + e^{-\lambda l}L\,Z(u-l);$$

en outre, la somme des résidus de la fonction elliptique Φ étant nulle, on a, entre les pôles et les résidus de F, la relation

$$(19) \qquad A\,e^{-\lambda a} + B\,e^{-\lambda b} + \ldots + L\,e^{-\lambda l} = 0.$$

Revenant à la fonction donnée F par la formule

$$F(u) = e^{\lambda u}\Phi(u),$$

on a enfin la formule

$$\begin{aligned} F(u) = C_0\,e^{\lambda u} &+ A\,e^{\lambda(u-a)}Z(u-a) \\ &+ B\,e^{\lambda(u-b)}Z(u-b) + \ldots + L\,e^{\lambda(u-l)}Z(u-l). \end{aligned}$$

On pourrait donc prendre actuellement comme élément simple la fonction

$$\Phi(u) = e^{\lambda u} Z(u)$$

et écrire

$$F(u) = C_0 e^{\lambda u} + A\varphi(u-a) + B\varphi(u-b) + \ldots + L\varphi(u-l).$$

Il est important de remarquer que, si les multiplicateurs sont spéciaux, les résidus ne peuvent plus être choisis arbitrairement : ils sont liés aux pôles correspondants par une relation, qui a la forme (19) quand tous les pôles sont simples.

III. — Équations de Lamé. Équations de M. Picard.

222. Équation de Lamé. — Une application des plus importantes des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ou fonctions à multiplicateurs constants, est l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes ayant pour coefficients des fonctions elliptiques.

La première équation de ce genre a été considérée par Lamé à propos de l'équilibre des températures dans un ellipsoïde homogène. Cette équation, appelée *équation de Lamé*, a d'abord été prise par Lamé sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

k étant le module, n un entier et h une constante. Lamé s'est borné à intégrer cette équation *pour des valeurs particulières* de h choisies de telle façon que l'équation admette une solution qui soit un polynome entier en $\operatorname{sn} x$, ou un polynome entier en $\operatorname{sn} x$ multiplié par l'un des trois facteurs $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, ou $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$.

Par exemple, quand $n=1$, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \operatorname{sn}^2 x + h)y$$

admet la solution

$$y = \operatorname{sn} x$$

pour $h = -(1+k^2)$, et la solution

$$y = \operatorname{cn} x$$

pour $h = -1$.

Hermite, se plaçant dans le cas général où h est quelconque, a montré que l'équation de Lamé peut toujours être intégrée et que son intégrale générale est de la forme

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}'\mathrm{F}(-x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction à multiplicateurs constants, C et C′ deux constantes arbitraires.

223. Forme de l'équation de Lamé dans les notations de Weierstrass. — Si dans l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h.$$

on fait le changement de variable

$$x = \frac{u}{\lambda} + i\mathrm{K}',$$

u désignant la nouvelle variable et λ une constante, et si l'on se reporte à la formule

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{\lambda} + i\mathrm{K}'\right) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,\dfrac{u}{\lambda}},$$

l'équation devient

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2\,\mathrm{sn}^2\,\dfrac{u}{\lambda}} + h.$$

Introduisons maintenant la fonction pu par la formule (n° 99)

$$\frac{1}{\lambda^2\,\mathrm{sn}^2\,\dfrac{u}{\lambda}} = p(u \mid \omega, \omega') + \frac{1+k^2}{3\lambda^2},$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = n(n+1)pu + l,$$

où l est une constante. C'est là la forme de l'équation de Lamé dans la notation de Weierstrass, telle que nous l'avons rencontrée au n° 206.

224. Intégration de l'équation de Lamé pour $n=1$. — Nous allons exposer la méthode d'Hermite pour le cas de $n=1$, qui, d'après les recherches d'Hermite, se présente dans l'étude des mouvements à la Poinsot. Nous rattacherons ensuite le cas où n est un entier quelconque à un théorème de M. Picard.

L'équation de Lamé, pour $n=1$, peut s'écrire

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2}=2\wp u+l. \tag{20}$$

Essayons de la vérifier par la fonction à multiplicateurs constants

$$y_1=\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u}e^{\lambda u},$$

a et λ désignant des constantes. Nous avons, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}=\zeta(u+a)-\zeta u+\lambda,$$

et en dérivant de nouveau

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{du^2}-\left(\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}\right)^2=\wp u-\wp(u+a).$$

Mais d'après la formule d'addition pour ζu (nº 44) la valeur de $\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}=\zeta a+\lambda+\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' a}{\wp u-\wp a};$$

puis, d'après la deuxième formule d'addition pour $\wp u$ (nº 45), on a

$$\wp(u+a)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' a}{\wp u-\wp a}\right)^2-\wp u-\wp a.$$

On a donc enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{du^2}=2\wp u+\wp a-\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' a}{\wp u-\wp a}\right)^2\\ +\left(\zeta a+\lambda+\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' a}{\wp u-\wp a}\right)^2.\end{aligned}$$

Pour que le second membre devienne égal à $2\wp u+l$, on voit

qu'il suffit de faire

$$pa = l, \qquad \lambda = -\zeta a.$$

Ainsi l'équation (20) admet la solution

$$y_1 = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a},$$

à condition que la constante a soit déterminée par l'équation

$$(21) \qquad pa = l.$$

Comme l'équation différentielle ne change pas quand on change u en $-u$, elle admet également la deuxième solution

$$y_2 = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a},$$

qui s'obtient aussi en changeant le signe de a, ce qui est évidemment possible d'après l'équation (21) dont le premier membre est une fonction paire de a.

L'équation de Lamé pour $n = 1$ admet donc l'intégrale générale

$$y = C_1 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a} + C_2 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a},$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

225. **Équations de M. Picard.** — L'équation de Lamé rentre dans une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes qui peuvent être intégrées à l'aide des fonctions à multiplicateurs constants, comme l'a montré M. Picard (*Comptes rendus*, 1880, 1er semestre).

Soit une équation linéaire d'ordre n de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + f_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x) y = 0,$$

dont les coefficients $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sont des fonctions elliptiques aux mêmes périodes 2ω et $2\omega'$; supposons en outre que l'on sache que l'intégrale générale est méromorphe.

Dans ces conditions, *l'équation est intégrable à l'aide de fonctions à multiplicateurs constants.*

Pour le démontrer, supposons l'équation du troisième ordre

$$(22)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}+f_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+f_2(x)\frac{dy}{dx}+f_3(x)y=0.$$

Le raisonnement que nous allons employer s'appliquera à une équation d'un ordre quelconque.

Le point de départ est dans ce fait que quatre solutions quelconques y_1, y_2, y_3, y_4 de l'équation du troisième ordre (22) sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants de la forme

$$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4=0.$$

Soit alors

$$y_1=\varphi(x)$$

une intégrale de l'équation : par hypothèse, c'est une fonction uniforme de x. Comme l'équation différentielle ne change pas quand on change x en $x+2\omega$, elle admet aussi les intégrales

$$y_2=\varphi(x+2\omega),\qquad y_3=\varphi(x+4\omega),\qquad y_4=\varphi(x+6\omega).$$

Entre ces quatre fonctions a lieu, quel que soit x, une relation de la forme

$$(23)\qquad C_1\varphi(x)+C_2\varphi(x+2\omega)+C_3\varphi(x+4\omega)+C_4\varphi(x+6\omega)=0.$$

En supposant C_4 différent de zéro et divisant par C_4, on a

$$(24)\qquad \varphi(x+6\omega)=c_1\varphi(x)+c_2\varphi(x+2\omega)+c_3\varphi(x+4\omega),$$

c_1, c_2, c_3 désignant des constantes déterminées. Considérons alors la fonction

$$(25)\qquad \psi(x)=\lambda_1\varphi(x)+\lambda_2\varphi(x+2\omega)+\lambda_3\varphi(x+4\omega),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des constantes arbitraires. Cette fonction est une intégrale de l'équation : nous allons montrer que l'on peut déterminer les rapports de ces constantes λ de telle façon que

$$(26)\qquad \psi(x+2\omega)=\mu\psi(x),$$

μ étant une constante convenablement choisie. En effet, cette dernière relation s'écrit, en vertu des précédentes (24) et (25),

$$\begin{aligned}\lambda_1\varphi(x+2\omega)+\lambda_2\varphi(x+4\omega)+\lambda_3[c_1\varphi(x)+c_2\varphi(x+2\omega)+c_3\varphi(x+4\omega)]\\ =\mu[\lambda_1\varphi(x)+\lambda_2\varphi(x+2\omega)+\lambda_3\varphi(x+4\omega)];\end{aligned}$$

d'où, en égalant les coefficients de $\varphi(x)$, $\varphi(x+2\omega)$, $\varphi(x+4\omega)$,

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu\lambda_1 \qquad\qquad -c_1\lambda_3 \quad = 0, \\ -\lambda_1+\mu\lambda_2-c_2\lambda_3 \quad = 0, \\ \qquad -\lambda_2+(\mu-c_3)\lambda_3 = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de λ_1, λ_2, λ_3 entre ces équations donne, pour déterminer μ, l'équation du troisième degré

$$(28)\qquad \mu^3-c_3\mu^2-c_2\mu-c_1=0.$$

Après que l'on aura pris pour μ une racine de cette équation, on tirera des équations (27) devenues compatibles les rapports de deux des quantités λ_1, λ_2, λ_3 à la troisième, et l'on aura ainsi une intégrale $\psi(x)$ telle que

$$\psi(x+2\omega)=\mu\psi(x).$$

En partant maintenant de cette intégrale, comme nous sommes partis de $\varphi(x)$, on montrera que l'on peut déterminer des coefficients constants λ'_1, λ'_2, λ'_3 de telle façon que l'intégrale

$$F(x)=\lambda'_1\psi(x)+\lambda'_2\psi(x+2\omega')+\lambda'_3\psi(x+4\omega')$$

vérifie une relation de la forme

$$F(x+2\omega')=\mu' F(x).$$

D'ailleurs cette fonction $F(x)$ vérifie évidemment la relation

$$F(x+2\omega)=\mu F(x),$$

puisqu'elle est une somme de trois fonctions ψ qui la vérifient séparément.

On a donc démontré que l'équation possède *au moins* une intégrale $F(x)$ admettant deux multiplicateurs constants. Supposons cette intégrale trouvée : alors, conformément à la théorie générale des équations linéaires, on fera le changement de fonction

$$y=F(x)\int z\,dx,\qquad z=\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{F(x)}\right],$$

z étant la nouvelle fonction inconnue. Cette fonction z vérifie une équation du second ordre

$$(29)\qquad \frac{d^2z}{dx^2}+g_1(x)\frac{dz}{dx}+g_2(x)z=0,$$

dont les coefficients sont *doublement périodiques*, comme formés rationnellement avec les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ qui sont doublement périodiques et les quotients

$$\frac{F'(x)}{F(x)}, \quad \frac{F''(x)}{F(x)},$$

qui le sont également. En outre, l'intégrale générale y de l'équation donnée étant supposée méromorphe, la nouvelle fonction

$$z = \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{F(x)}\right]$$

possède les mêmes propriétés. L'équation différentielle en z possède donc les propriétés caractéristiques des équations de M. Picard : elle admet au moins une intégrale qui est une fonctions à multiplicateurs constants. On l'abaissera par le même procédé à une équation du premier ordre qui s'intégrera par une fonction à multiplicateurs constants.

Remarque. — Nous avons supposé, dans notre raisonnement, C_1 différent de zéro. Si C_1 était nul (équation 23), on aurait

$$C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x + 2\omega) + C_3\varphi(x + 4\omega) = 0.$$

Alors on supposerait C_3 différent de zéro et l'on aurait

$$\varphi(x + 4\omega) = c_1\varphi(x) + c_2\varphi(x + 2\omega);$$

on poserait

$$\psi(x) = \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi(x + 2\omega)$$

et l'on déterminerait le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ par la condition

$$\psi(x + 2\omega) = \mu\psi(x),$$

μ désignant une constante. Les conclusions sont donc les mêmes.

Le cadre de cet Ouvrage ne nous permet pas d'entrer dans le détail des divers cas qui peuvent se présenter. Nous renverrons le lecteur aux Mémoires de M. Picard (*Journal de Crelle*, t. 90, p. 281) et de M. Floquet (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, 1884, p. 181).

226. **Retour à l'équation de Lamé.** — Prenons comme exemple l'équation de Lamé

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = n(n+1)pu + l.$$

où n est un entier que l'on peut toujours supposer *positif*, car l'équation ne change pas par le changement de n en $(-n-1)$. Il résulte des théorèmes sur les équations linéaires établis par L. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 121) que cette équation a, quel que soit l, une intégrale générale uniforme ne possédant d'autres singularités que des pôles à distance finie. On peut donc affirmer, d'après le théorème de M. Picard, que cette équation est intégrable à l'aide des fonctions à multiplicateurs constants. Voyons quels seront les pôles de ces fonctions et leur ordre de multiplicité.

Soit $u=a$ un pôle, d'ordre α, d'une intégrale y; on a, dans le voisinage de ce point,

$$y = C(u-a)^{-\alpha}[1 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \ldots],$$

C, A_1, A_2 désignant des constantes. On en conclut

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = -\frac{\alpha}{u-a} + \frac{A_1 + 2A_2(u-a) + \ldots}{1 + A_1(u-a) + \ldots},$$

ou, en développant le second rapport suivant les puissances de $u-a$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = -\frac{\alpha}{u-a} + A_1 + B_1(u-a) + \ldots.$$

Différentions par rapport à u; il vient

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} - \left(\frac{1}{y}\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{\alpha}{(u-a)^2} + B_1 + \ldots,$$

et, en remplaçant $\frac{1}{y}\frac{dy}{du}$ par sa valeur,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(u-a)^2} - \frac{2\alpha A_1}{u-a} + \ldots.$$

D'après l'équation de Lamé, ceci doit être égal à

$$n(n+1)pu + l.$$

Puisque les seuls pôles de pu sont o et les points homologues, a doit être égal à o ou homologue de o. Comme la partie principale de pu dans le voisinage d'un de ses pôles est

$$\frac{1}{(u-a)^2},$$

on doit avoir

$$\alpha(\alpha+1)=n(n+1), \quad \alpha A_1=0.$$

La première relation exige, puisque α et n sont positifs,

$$\alpha=n$$

et la seconde

$$A_1=0.$$

Ainsi une intégrale quelconque de l'équation de Lamé admet, comme seuls pôles, les points homologues de o : tous ces pôles sont d'ordre n. Nous savons d'autre part que l'équation de Lamé admet au moins une intégrale y_1 qui est une fonction à multiplicateurs constants. D'après la formule (8) du n° 214, qui donne une fonction à multiplicateurs constants comme le quotient de deux produits de fonctions H mettant en évidence les pôles et les zéros, cette intégrale y_1 est nécessairement de la forme

$$y_1=A\,e^{\lambda x}\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots H(x+a_n)}{H^n(x)}$$

ou, avec les notations de Weierstrass,

$$y_1=B\,e^{\lambda x}\frac{\sigma(x+a_1)\sigma(x+a_2)\ldots\sigma(x+a_n)}{\sigma^n x}.$$

Il reste à déterminer les constantes

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \lambda,$$

de façon que cette fonction vérifie l'équation de Lamé; c'est ce que l'on fera par un calcul analogue à celui que nous avons développé (n° 224) pour le cas simple de $n=1$.

L'équation admettra une deuxième intégrale, y_2 déduite de y_1 par le changement de x en $-x$. On retrouve ainsi les résultats d'Hermite.

CHAPITRE XII.

FONCTIONS A MULTIPLICATEURS EXPONENTIELS OU FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

227. **Définition.** — Hermite a appelé *fonction doublement périodique de troisième espèce* toute fonction méromorphe (n° 4) qui vérifie deux équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x+2\omega) = e^{ax+b}\varphi(x), \\ \varphi(x+2\omega') = e^{a'x+b'}\varphi(x), \end{cases}$$

a, b, a', b' désignant des constantes, et le rapport $\omega' : \omega$ étant imaginaire. Les facteurs e^{ax+b} et $e^{a'x+b'}$, par lesquels la fonction est multipliée quand l'argument croît d'une période, sont les *multiplicateurs* de la fonction : ces multiplicateurs sont actuellement des exponentielles linéaires en x. L'étude de ces fonctions a été faite par Hermite (*Comptes rendus*, 1861 et 1862; *Journal de Crelle*, t. 100; *Œuvres*, t. II, p. 109; t. IV, p. 223); par Biehler (*Thèse de Doctorat*, 1879) et par M. Appell (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, II, III et V). Des exemples simples de ce genre de fonctions sont fournis immédiatement par les fonctions σ, H, Θ, ... D'une manière générale, la fonction

$$(2)\qquad \varphi(x) = \mathrm{A}\, e^{\alpha x^2+\beta x}\frac{\mathrm{H}(x-b_1)\,\mathrm{H}(x-b_2)\ldots\mathrm{H}(x-b_p)}{\mathrm{H}(x-a_1)\,\mathrm{H}(x-a_2)\ldots\mathrm{H}(x-a_q)},$$

où le nombre p des fonctions H au numérateur est différent du nombre q des mêmes fonctions au dénominateur, est une fonction doublement périodique de troisième espèce. Nous verrons plus loin que, réciproquement, *toute fonction doublement périodique de troisième espèce peut être mise sous cette forme.* Nous donnerons encore deux expressions principales de ces fonctions : l'une, par un quotient tel que (2) de deux produits de fonctions H, mettant en évidence les zéros et les pôles; l'autre, par une somme

d'éléments simples, mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes.

228. Simplification des relations que vérifie une fonction à multiplicateurs exponentiels. — Soit une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$\varphi(x+2\omega) = e^{ax+b}\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2\omega') = e^{a'x+b'}\varphi(x).$$

Posons, en désignant par λ et μ des constantes,

$$f(x) = e^{\lambda x^2+\mu x}\varphi(x).$$

On peut toujours déterminer λ et μ de façon que $f(x)$ admette la période 2ω, c'est-à-dire ne change pas de valeur quand x croît de 2ω. En effet, on a

$$\frac{f(x+2\omega)}{f(x)} = e^{4\lambda\omega x+4\lambda\omega^2+2\mu\omega+ax+b},$$

et pour rendre cette exponentielle égale à 1, il suffit de déterminer λ et μ par les deux équations du premier degré

(3) $$4\lambda\omega = -a, \qquad 4\lambda\omega^2+2\mu\omega = -b.$$

La fonction $f(x)$ vérifie alors deux relations de la forme

(4) $$\begin{cases} f(x+2\omega) = f(x), \\ f(x+2\omega') = e^{Ax+B}f(x), \end{cases}$$

A et B désignant deux constantes dont la première a pour valeur

$$A = 4\lambda\omega'+a' = \frac{\omega a'-a\omega'}{\omega}.$$

Comme la fonction $f(x)$ admet la période 2ω, les deux membres de la seconde relation (4) ne doivent pas changer quand x croît de 2ω : on a donc

$$e^{2A\omega} = 1, \qquad 2A\omega = -2N\pi i,$$

N désignant un entier positif ou négatif. Les relations (4) s'écrivent alors

$$f(x+2\omega) = f(x),$$
$$f(x+2\omega') = e^{-\frac{N i\pi x}{\omega}+B}f(x).$$

Si l'entier N était *nul*, la fonction $f(x)$ serait une fonction aux multiplicateurs constants 1 et e^{B}, fonction que nous venons d'étudier. *Nous supposerons donc* N *différent de zéro*. Dans cette hypothèse, on peut encore simplifier un peu les relations ci-dessus, en prenant comme nouvelle variable

$$u = x - \frac{B\omega}{Ni\pi}$$

et posant

$$F(u) = f\left(u + \frac{B\omega}{Ni\pi}\right).$$

Cette fonction $F(u)$ vérifie alors les deux relations

$$(5) \qquad \begin{cases} F(u+2\omega) = F(u), \\ F(u+2\omega') = e^{-\frac{Ni\pi u}{\omega}} F(u). \end{cases}$$

C'est à cette forme simple que nous supposerons toujours que l'on ait ramené les deux relations vérifiées par une fonction doublement périodique de troisième espèce.

229. Exemple du cas N = 1. La fonction

$$(6) \qquad E(u) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H_1(u) = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H(u-\omega)$$

est une fonction entière (n° 2). D'après les propriétés de la fonction H_1, on a

$$H_1(u+2\omega) = -H_1(u),$$
$$H_1(u+2\omega') = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')} H_1(u);$$

ce sont les formules du n° 78, où nous écrivons 2ω et $2\omega'$ au lieu de $2K$ et $2iK'$. Il en résulte que la fonction $E(u)$ vérifie les relations

$$(7) \qquad \begin{cases} E(u+2\omega) = E(u), \\ E(u+2\omega') = e^{-\frac{i\pi u}{\omega}} E(u), \end{cases}$$

relations de la forme (5) où N = 1. Cette fonction entière $E(u)$ a les mêmes zéros que $H_1(u)$, à savoir : le point $u = \omega$ et les points homologues; il y a un et un seul de ces zéros dans chaque parallélogramme des périodes.

Nous avons donné pour $H_1(u)$ la série suivante (p. 120) :

(p. 120)

$$H_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{\frac{(2n+1)i\pi u}{2\omega}}.$$

La fonction $E(u)$ est donc donnée par la série

$$E(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n(n+1)} e^{\frac{(n+1)i\pi u}{\omega}}$$

ou encore, en changeant n en $n-1$,

$$E(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n(n-1)} e^{\frac{ni\pi u}{\omega}}.$$

I. — Décomposition en facteurs. Conséquences.

230. Première expression d'une fonction doublement périodique de troisième espèce. — Soit une fonction $F(u)$ vérifiant les relations

$$(8)\qquad \begin{cases} F(u+2\omega) = F(u), \\ F(u+2\omega') = e^{-\frac{Ni\pi u}{\omega}} F(u), \end{cases}$$

où N est un entier positif ou négatif. Si nous élevons à la puissance N la fonction $E(u)$ du numéro précédent, nous obtiendrons une fonction

$$E^N(u),$$

vérifiant les deux relations

$$E^N(u+2\omega) = E^N(u),$$

$$E^N(u+2\omega') = e^{-\frac{Ni\pi u}{\omega}} E^N(u).$$

D'après cela, le quotient

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{E^N(u)}$$

est une fonction *elliptique*. On a en effet

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u), \qquad \Phi(u+2\omega') = \Phi(u).$$

Cette fonction elliptique Φ a, dans un parallélogramme des périodes, autant de zéros que de pôles ; on peut l'écrire (n° 40)

$$(9)\qquad \Phi(u) = A\frac{H(u-b_1)\,H(u-b_2)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a_1)\,H(u-a_2)\ldots H(u-a_r)},$$

sous la condition

$$(10)\qquad a_1+a_2+\ldots+a_r = b_1+b_2+\ldots+b_r.$$

De cette première expression de la fonction $F(u)$ sous la forme

$$F(u) = E^N(u)\Phi(u),$$

on conclut immédiatement les résultats suivants. Nous distinguerons deux cas : 1° l'entier N est positif; 2° l'entier N est négatif.

231. Cas de N positif. — Si nous posons $N = m$, m positif, le facteur $E^m(u)$ est une fonction ne devenant pas infinie et admettant comme zéros d'ordre m le point ω et les points homologues. On a alors, en remplaçant $E(u)$ par son expression (6),

$$(11)\qquad F(u) = B\,e^{\frac{m\pi ui}{2\omega}}\frac{H^m(u-\omega)\,H(u-b_1)\,H(u-b_2)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a_1)\,H(u-a_2)\ldots H(u-a_r)}.$$

Il peut se faire, dans cette expression, que certains des points a_1, a_2, ... coïncident avec ω ou soient homologues de ω : il y aurait alors des réductions évidentes. Mais, dans tous les cas, en comptant chaque zéro et chaque pôle avec son degré de multiplicité, on a le théorème suivant :

Si N est égal à un entier positif m, la fonction $F(u)$ a, dans un parallélogramme des périodes, m zéros de plus que de pôles. La somme de ces zéros, diminuée de la somme de ces infinis, est congrue à $m\omega$. La première partie de ce théorème est évidente d'après la formule (11); pour établir la deuxième, il suffit d'observer que la somme des zéros, diminuée de la somme des infinis, est congrue à

$$m\omega + b_1 + b_2 + \ldots + b_r - a_1 - a_2 - \ldots - a_r,$$

c'est-à-dire à $m\omega$ d'après la relation (10).

Réciproquement, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+m}$ des

constantes vérifiant la relation

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{r+m}-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_r=m\omega,$$

la fonction

$$F(u)=B\,e^{\frac{m\pi ui}{2\omega}}\frac{H(u-\beta_1)H(u-\beta_2)\ldots H(u-\beta_{r+m})}{H(u-\alpha_1)\ldots H(u-\alpha_r)}$$

est une fonction vérifiant les relations

$$F(u+2\omega)=F(u),\qquad F(u+2\omega')=e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}F(u);$$

comme il résulte des propriétés de la fonction H.

Fonctions entières admettant les multiplicateurs 1 *et* $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$. — Quand N est égal à un entier positif m, nous venons de voir que la fonction F a m zéros de plus que de pôles : il peut se faire qu'elle n'ait pas de pôles du tout : alors c'est une fonction entière $\mathfrak{E}(u)$ ayant dans un parallélogramme m zéros

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_m;$$

ces fonctions particulières ont pour expressions

$$\mathfrak{E}(u)=B\,e^{\frac{m\pi ui}{2\omega}}H(u-\beta_1)H(u-\beta_2)\ldots H(u-\beta_m),$$

avec la condition

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m=m\omega.$$

On voit que la fonction entière la plus générale, vérifiant les deux relations

$$(12)\qquad \begin{cases}\mathfrak{E}(u+2\omega)=\mathfrak{E}(u),\\ \mathfrak{E}(u+2\omega')=e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}\mathfrak{E}(u),\end{cases}$$

dépend de m constantes arbitraires B, β_1, β_2, ..., β_{m-1} : elle est déterminée, à un facteur constant près B, quand on connaît $(m-1)$ de ces zéros. Nous allons montrer que *la fonction entière la plus générale vérifiant les relations* (12) *peut s'exprimer en fonction linéaire et homogène de m fonctions spéciales vérifiant les mêmes relations*. Pour cela, remarquons que toute fonction entière admettant la période 2ω peut être représentée par une série

de la forme

$$(13) \qquad \mathfrak{E}(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi u i}{\omega}},$$

dont chaque terme admet la période 2ω. En désignant toujours par q la quantité $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, on a

$$\mathfrak{E}(u+2\omega') = \sum A_n q^{2n} e^{\frac{n\pi u i}{\omega}},$$

$$e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}} \mathfrak{E}(u) = \sum A_n e^{\frac{(n-m)\pi u i}{\omega}}.$$

D'après la seconde des relations (12), ces deux séries doivent être identiques. En égalant dans ces séries les coefficients des mêmes puissances de $e^{\frac{\pi u i}{\omega}}$, on trouve

$$(14) \qquad A_{n+m} = A_n q^{2n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

D'après cette relation unique entre les coefficients, on voit que l'on peut prendre arbitrairement $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ et déterminer ensuite tous les coefficients.

Remarquons incidemment que les relations (14) montrent bien qu'il ne peut exister de fonction entière doublement périodique (n° 19). En effet, si la fonction $\mathfrak{E}(u)$ admet les périodes 2ω, $2\omega'$, elle vérifie les relations (12) avec $m=0$; mais $\omega' : \omega$ étant imaginaire, on a toujours $q^{2n} \neq 1$, sauf pour $n=0$. D'après (14), on aura donc $A_n = 0 \, (n \neq 0)$ et la fonction $\mathfrak{E}(u)$ se réduira à la constante A_0.

Revenons maintenant à notre question et faisons successivement $n=0$, $n=m$, $n=2m$, $\ldots$, $n=(\nu-2)m$, dans les équations (14); nous aurons

$$A_m = A_0, \qquad A_{2m} = A_m q^{2m}, \qquad \ldots, \qquad A_{\nu m} = A_{(\nu-1)m} q^{2(\nu-1)m},$$

d'où, en multipliant,

$$(15) \qquad A_{\nu m} = A_0 q^{\nu(\nu-1)m};$$

en faisant de même, dans (14), $n=-m$, $n=-2m$, $\ldots$, $n=-\mu m$ et multipliant, on vérifiera que la formule (15) subsiste pour ν négatif. Tous les coefficients $A_{\nu m}$ sont ainsi exprimés à

l'aide de A_0. Par un calcul semblable on exprime tous les coefficients $A_{\nu m+1}$ en fonction de A_1, $A_{\nu m+2}$ en fonction de A_2, ..., $A_{\nu m+m-1}$ en fonction de A_{m-1}. On trouve

$$A_{\nu m+1} = A_1 q^{\nu(\nu-1)m+2\nu},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{\nu m+\rho} = A_\rho q^{\nu(\nu-1)m+2\rho\nu},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A_{\nu m+m-1} = A_{m-1} q^{\nu(\nu-1)m+2(m-1)\nu}.$$

En portant ces valeurs dans le développement de la fonction entière $\mathfrak{E}(u)$, on trouve qu'il prend la forme suivante :

$$\mathfrak{E}(u) = A_0 E_0(u) + A_1 E_1(u) + \ldots + A_\rho E_\rho(u) + \ldots + A_{m-1} E_{m-1}(u),$$

où E_0, E_1, ... désignent les fonctions entières suivantes :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} E_0(u) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m} e^{\frac{\nu m\pi u}{\omega}}, \\ E_1(u) &= e^{\frac{\pi u i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m+2\nu} e^{\frac{\nu m\pi u i}{\omega}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_\rho(u) &= e^{\frac{\rho\pi u i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m+2\rho\nu} e^{\frac{\nu m\pi u i}{\omega}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Ainsi, comme nous l'avons dit, la fonction entière la plus générale admettant les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ est une fonction linéaire et homogène de m fonctions spéciales E_0, E_1, ..., E_{m-1}. L'expression de cette fonction contient m constantes arbitraires A_0, A_1, ..., A_{m-1} dont on peut déterminer les rapports de façon que la fonction $\mathfrak{E}(u)$ admette $m-1$ zéros β_1, β_2, ..., β_{m-1} donnés à l'avance. Ces fonctions E_ρ s'expriment toutes à l'aide de la première ; on a évidemment

$$E_\rho(u) = e^{\frac{\rho\pi u i}{\omega}} E_0\left(u + \frac{2\rho\omega'}{m}\right).$$

D'ailleurs la fonction E_0 s'exprime aisément par une fonction

de Jacobi. En effet, reprenons la fonction $E(u)$ construite plus haut (n° 219) avec les périodes 2ω et $2\omega'$

$$E(u \mid \omega, \omega') = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)} e^{\frac{\nu\pi u i}{\omega}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H_1(u \mid \omega, \omega'),$$

où nous mettrons en évidence les périodes ayant servi à construire la fonction H_1. Si dans cette formule on change ω en $\frac{\omega}{m}$, $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$ se change en q^m et la série du second membre devient précisément $E_0(u)$. On a donc

$$E_0(u) = E\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{m}, \omega'\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q^m}} e^{\frac{m\pi u i}{2\omega}} H_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{m}, \omega'\right).$$

232. Cas de N négatif. — Supposons maintenant N négatif, et posons

$$N = -m,$$

où m est un entier positif. Les fonctions à étudier sont alors telles que

$$F(u + 2\omega) = F(u),$$
$$F(u + 2\omega') = e^{\frac{m\pi u i}{2\omega}} F(u).$$

On conclut immédiatement de ces relations

$$\frac{1}{F(u + 2\omega)} = \frac{1}{F(u)},$$
$$\frac{1}{F(u + 2\omega')} = e^{-\frac{m\pi u i}{2\omega}} \frac{1}{F(u)}.$$

L'inverse $\frac{1}{F(u)}$ de la fonction à étudier est donc une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ (m positif), c'est-à-dire une des fonctions du numéro précédent. L'inverse $\frac{1}{F(u)}$ peut alors s'écrire

$$\frac{1}{F(u)} = B\, e^{\frac{m\pi u i}{2\omega}} \frac{H(u - \beta_1) \ldots H(u - \beta_{r+m})}{H(u - \alpha_1) \ldots H(u - \alpha_r)},$$

avec la condition

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{r+m} - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_r = m\omega.$$

La fonction $F(u)$ a donc pour expression générale

$$F(u) = C e^{-\frac{m\pi u i}{2\omega}} \frac{H(u-\alpha_1)\ldots H(u-\alpha_r)}{H(u-\beta_1)\ldots H(u-\beta_{r+m})}.$$

Elle a, dans un parallélogramme des périodes, m pôles de plus que de zéros, et la différence entre la somme de ces pôles et la somme de ces zéros est congrue à $m\omega$.

Il ne peut donc pas exister de fonctions aux multiplicateurs 1 *et* $e^{\frac{m\pi u i}{\omega}}$, *n'ayant pas de pôles*. Mais il en existe qui n'ont pas de zéros; ce sont les inverses $\frac{1}{\mathfrak{E}(u)}$ des fonctions sans pôles du numéro précédent.

II. — Décomposition en éléments simples.

233. Étude de l'élément simple. — Désignons par x et y deux variables indépendantes, par m un entier positif, et considérons la fonction de x et y définie par la série

$$(17)\qquad \chi_m(x,y) = \frac{\pi}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} \cot\frac{\pi}{2\omega}(x-y-2n\omega')$$

ou bien

$$(18)\qquad \chi_m(x,y) = \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2n}}.$$

$\omega' : \omega$ étant imaginaire, cette série est convergente pour toutes les valeurs de x et y à l'exception de celles qui vérifient la condition

$$x - y = 2n\omega + 2n'\omega' \qquad (n \text{ et } n' \text{ entiers}),$$

et pour lesquelles un des termes de la série devient infini.

Si l'on considère x comme une constante et y comme variable, la fonction $\chi_m(x,y)$ est une fonction uniforme de y n'ayant à

distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier ordre, à savoir les points

$$y = x - 2n\omega - 2n'\omega';$$

le résidu relatif au pôle $y = x$ est -1, car le seul terme de la série qui devient infini pour $y = x$ est

$$\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-y).$$

Cette fonction vérifie les deux relations suivantes, qui s'établissent aisément :

$$(19)\qquad \begin{cases} \chi_m(x, y+2\omega) = \chi_m(x, y), \\ \chi_m(x, y+2\omega') = e^{-\frac{m\pi yi}{\omega}}\chi_m(x, y). \end{cases}$$

Cette fonction χ_m de la variable y admet donc les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi yi}{\omega}}$: elle a dans un parallélogramme $(m+1)$ zéros et un pôle homologue de x.

Si l'on considère, au contraire, y comme une constante et x comme variable, il se présente des circonstances entièrement différentes. La fonction $\chi_m(x, y)$ est alors une fonction uniforme de x n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier ordre, à savoir les points

$$x = y + 2n\omega + 2n'\omega';$$

le résidu de cette fonction relatif au pôle $x = y$ est égal à $+1$. Elle vérifie d'abord la relation évidente

$$(20)\qquad \chi_m(x+2\omega, y) = \chi_m(x, y),$$

puis l'équation

$$(21)\qquad \chi_m(x+2\omega', y) = e^{\frac{m\pi xi}{\omega}}\chi_m(x, y) - \frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi xi}{\omega}}\right)E_0(y)$$
$$-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-1)\pi xi}{\omega}}E_1(y) - \ldots - \frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-\rho)\pi xi}{\omega}}E_\rho(y) - \ldots - \frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{\pi xi}{\omega}}E_{m-1}(y),$$

où les m fonctions E_0, E_1, ..., E_{m-1} sont celles qui ont été définies plus haut (n° 231).

Pour démontrer cette relation fondamentale (21), remarquons

que la série (18) nous donne

$$\chi_m(x+2\omega', y) = \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2(n-1)}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2(n-1)}}$$

ou, en changeant n en $n+1$,

$$\chi_m(x+2\omega', y) = \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{m(n+1)\pi y i}{\omega}} q^{mn(n+1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2n}}.$$

Si nous formons alors la différence

$$\chi_m(x+2\omega', y) - e^{\frac{m\pi x i}{\omega}} \chi_m(x, y),$$

nous obtenons une série qui peut s'écrire

$$(22)\qquad \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{m(n+1)\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{(t+u)(u^m - t^m)}{t-u},$$

en posant, pour un moment,

$$(23)\qquad e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} = t, \qquad q^{2n} = u.$$

En effectuant la division, on a

$$\frac{(t+u)(u^m-t^m)}{t-u} = -(t^m + 2t^{m-1}u + 2t^{m-2}u^2 + \ldots + 2tu^{m-1} + u^m)$$

et en substituant dans la série (22) on voit que cette série se partage en $(m+1)$ séries.

La première de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{2\omega} \sum e^{\frac{m(n+1)\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} t^m,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de t,

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi x i}{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)}$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi x i}{\omega}} \mathrm{E}_0(y).$$

La deuxième de ces séries est de même

$$-\frac{\pi i}{\omega}\sum e^{\frac{m(n+1)\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)} t^{m-1} u,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi x i}{\omega}} e^{\frac{\pi y i}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)+2n}$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi x i}{\omega}} \mathrm{E}_1(y).$$

Ainsi de suite. La $(\rho+1)^{\text{ième}}$ de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-\rho)\pi x i}{\omega}} e^{\frac{\rho\pi y i}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)+2n\rho}$$

ou

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-\rho)\pi x i}{\omega}} \mathrm{E}_\rho(y).$$

La dernière ou $(m+1)^{\text{ième}}$ de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi y i}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi y i}{\omega}} q^{mn(n-1)+2nm},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{2\omega}\sum e^{\frac{m(n+1)\pi y i}{\omega}} q^{mn(n+1)}$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{2\omega}\mathrm{E}_0(y);$$

comme on le voit en changeant, dans la dernière $\sum$, n en $n-1$. Ce calcul démontre la formule (21).

On a ainsi les propriétés fondamentales de l'élément simple $\chi_m(x, y)$.

234. **Décomposition en éléments simples dans le cas où N est négatif,** $\mathrm{N}=-m$. — *Cas des pôles simples.* — Soit $\mathrm{F}(u)$ une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi u i}{\omega}}$, m étant positif. Une telle fonction possède au moins m pôles dans un parallélogramme des périodes. Supposons qu'elle ait r pôles simples $(r \geq m)$ homologues des points

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad l$$

et que les résidus aux points a, b, ..., l soient

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L.$$

Ces pôles et les résidus correspondants sont liés par m relations qu'il est aisé de former.

Relations entre les pôles et les résidus. — Considérons une des m fonctions entières $E_\rho(u)$ du n° 231 qui admettent les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$. Le produit

$$\Phi(u) = F(u)\, E_\rho(u)$$

est une fonction elliptique aux périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, les deux facteurs admettent séparément la période 2ω et, quand u croît de $2\omega'$, le premier facteur est multiplié par $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}$, le deuxième par $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$ et le produit ne change pas. Cette fonction elliptique a les mêmes pôles que $F(u)$, car le facteur $E_\rho(u)$ n'a pas de pôles. Le résidu de $\Phi(u)$ au pôle $u = a$ est $A\,E_\rho(a)$, car on a, au voisinage de $u = a$,

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

$$E_\rho(u) = E_\rho(a) + (u-a)\,E'_\rho(a) + \ldots,$$

d'où, en multipliant,

$$\Phi(u) = \frac{A\,E_\rho(a)}{u-a} + \text{fonction holomorphe}.$$

Les résidus de $\Phi(u)$ relatifs aux autres pôles sont de même $B\,E_\rho(b)$, ..., $L\,E_\rho(l)$. La somme des résidus d'une fonction elliptique étant nulle, on a la relation

$$(24) \qquad A\,E_\rho(a) + B\,E_\rho(b) + \ldots + L\,E_\rho(l) = 0.$$

En attribuant à l'indice ρ les m valeurs 0, 1, 2, ..., $m-1$ (n° 231), on obtient ainsi m relations nécessaires entre les pôles et les résidus de $F(u)$.

Décomposition en éléments simples. — Considérons la différence

$$(25) \quad \Psi(u) = F(u) - A\chi_m(u, a) - B\chi_m(u, b) - \ldots - L\chi_m(u, l);$$

nous allons montrer que cette différence Ψ est *identiquement nulle*. Tout d'abord, la fonction $\Psi(u)$ ainsi construite admet les multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}$: on a évidemment

$$\Psi(u+2\omega)=\Psi(u),$$

car chaque terme du second membre admet la période 2ω; voyons ce que devient le second membre quand u croît de $2\omega'$: on a d'abord

$$F(u+2\omega')-e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}F(u)=0,$$

puis

$$\begin{aligned}
&\chi_m(u+2\omega', a)-e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\chi_m(u, a)\\
&=-\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)E_0(a)-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}}E_1(a)-\ldots-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{\pi ui}{\omega}}E_{m-1}(a),\\
&\chi_m(u+2\omega', b)-e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\chi_m(u, b)\\
&=-\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)E_0(b)-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}}E_1(b)-\ldots-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{\pi ui}{\omega}}E_{m-1}(b),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

comme il résulte de la relation fondamentale (21) dans laquelle on remplace x par u et y par a, ou b, ..., ou l. D'après cela, la différence

$$\Psi(u)-e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\Psi(u)$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&-\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)[AE_0(a)+BE_0(b)+\ldots+LE_0(l)],\\
&\quad-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}}[AE_1(a)+BE_1(b)+\ldots+LE_1(l)],\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&-\frac{\pi i}{\omega}e^{\frac{\pi ui}{\omega}}[AE_{m-1}(a)+BE_{m-1}(b)+\ldots+LE_{m-1}(l)];
\end{aligned}$$

cette différence est donc nulle, puisque chacune des sommes entre crochets est nulle en vertu des relations (24) entre les pôles et les résidus. Ainsi la fonction $\Psi(u)$ vérifie les deux relations

$$(26)\qquad \begin{cases}\Psi(u+2\omega)=\Psi(u),\\ \Psi(u+2\omega')=e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\Psi(u).\end{cases}$$

De plus, cette fonction Ψ est finie en tous les points à distance finie; elle n'a plus de pôles. Par exemple, dans le voisinage de $u = a$, on a

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

$$\chi_m(u, a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

et les autres fonctions $\chi_m(u, b), \ldots, \chi_m(u, l)$ sont holomorphes au point a : dans la combinaison donnant $\Psi(u)$, $\frac{1}{u-a}$ disparaît, et $\Psi(u)$ est holomorphe au point a. Elle l'est également aux points $b, \ldots, l$ et aux points homologues. En résumé, $\Psi(u)$ est une fonction *sans pôles* vérifiant les relations (26). Mais nous avons vu qu'il n'existe pas de fonctions sans pôles vérifiant ces relations (n° 232) : donc $\Phi(u)$ est identiquement nulle et l'on a la formule

$$(27) \qquad F(u) = A\chi_m(u, a) + B\chi_m(u, b) + \ldots + L\chi_m(u, l),$$

qui est la formule de décomposition cherchée, mettant en évidence les pôles de $F(u)$, $a, b, \ldots, l$ et les résidus $A, B, \ldots, L$.

Réciproquement, si $a, b, \ldots, l$ sont des points arbitraires, non homologues deux à deux, et $A, B, \ldots, L$ des constantes vérifiant les relations (24), l'expression (27) définit une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi i}{\omega}}$ admettant comme pôles simples les points $a, b, \ldots, l$ avec les résidus $A, B, \ldots, L$, et leurs homologues, et les relations (24) sont *suffisantes*.

Remarque. — On obtiendrait cette même formule de décomposition en considérant le produit

$$\Pi(v) = F(v)\chi(a, v),$$

comme une fonction de v. Ce produit $\Pi(v)$ est une fonction elliptique aux périodes 2ω et $2\omega'$, car les fonctions de v, $F(v)$ et $\chi_m(u, v)$ ont des multiplicateurs inverses; cette fonction $\Pi(v)$ admet comme pôles les points homologues de

$$v = a, \qquad v = b, \qquad \ldots, \qquad v = l, \qquad v = u,$$

avec les résidus respectifs

$$A\chi_m(u, a), \quad B\chi_m(u, b), \quad \ldots, \quad L\chi_m(u, l), \quad -F(u);$$

l'expression du dernier de ces résidus résulte de ce que $\chi_m(u, v)$, regardé comme fonction de v, admet le pôle simple $v = u$ avec le résidu -1 (n° 233). En écrivant que la somme des résidus de la fonction elliptique, relatifs aux pôles non homologues, est nulle, on a immédiatement la formule de décomposition (27).

Cas des pôles multiples. — Nous avons écrit la formule de décomposition et les relations entre les pôles et les résidus dans le cas des pôles simples. Si les pôles sont multiples, ces formules se généralisent, comme celles que nous avons données (nos 26 et 219) pour les fonctions elliptiques et les fonctions à multiplicateurs constants. Bornons-nous à écrire ces formules. Supposons que la fonction $F(u)$ aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi u i}{\omega}}$ admette les pôles $a, b, \ldots, l$ avec les parties principales

$$\frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$
$$\frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura la formule

$$F(u) = \sum \left[A\chi_m(u, a) + A_1 \frac{d\chi_m(u, a)}{da} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2\chi_m(u, a)}{da^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}\chi_m(u, a)}{da^{\alpha-1}} \right],$$

la somme étant étendue à tous les pôles. En outre, les relations entre les pôles et les coefficients des parties principales sont

$$\sum \left[A E_\rho(a) + A_1 \frac{dE_\rho(a)}{da} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2E_\rho(a)}{da^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}E_\rho(a)}{da^{\alpha-1}} \right] = 0,$$

où l'on fait successivement $\rho = 0, 1, 2, \ldots, (m-1)$.

235. **Exemple.** — Soit

$$\varphi(x) = \frac{1}{H(x) H_1(x)}.$$

Cette fonction vérifie les relations

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2\omega')=e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left(x+\omega'-\frac{\omega}{2}\right)}\varphi(x)$$

Si donc on fait, pour un moment,

$$x+\omega'-\frac{\omega}{2}=u,$$
$$\varphi\left(u-\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=\mathrm{F}(u),$$

cette fonction F vérifie les deux équations

$$\mathrm{F}(u+2\omega)=\mathrm{F}(u),\qquad \mathrm{F}(u+2\omega')=e^{\frac{2\pi ui}{\omega}}\mathrm{F}(u).$$

Pour cette fonction F le nombre entier désigné par m est donc 2. La fonction $\varphi(x)$ admet dans un parallélogramme des périodes les deux pôles simples o et ω avec les résidus respectifs $\frac{1}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)}$ et $-\frac{1}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)}$. Comme u est égal à $x+\omega'-\frac{\omega}{2}$, la fonction $\mathrm{F}(u)$ admet les deux pôles

$$a=\omega'-\frac{\omega}{2},\qquad b=\omega'+\frac{\omega}{2},$$

avec les mêmes résidus

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)},\qquad \mathrm{B}=-\frac{1}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)}.$$

On a donc la formule de décomposition

$$\mathrm{F}(u)=\mathrm{A}\chi_2(u,\ a)+\mathrm{B}\chi_2(u,b),$$

d'où, en revenant à la variable x et remplaçant A, B, a, b par leurs valeurs

$$\frac{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)}{\mathrm{H}(x)\mathrm{H}_1(x)}=\chi_2\left(x+\omega'-\frac{\omega}{2},\ \omega'-\frac{\omega}{2}\right)-\chi_2\left(x+\omega'-\frac{\omega}{2},\ \omega'+\frac{\omega}{2}\right).$$

Si l'on met pour ces fonctions χ_2 les séries servant de définition, on a

$$\frac{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}_1(0)}{\mathrm{H}(x)\mathrm{H}_1(x)}$$
$$=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{2n^2}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-2n\omega')-\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-\omega-2n\omega')\right].$$

La seconde cotangente est égale à — tang $\frac{\pi}{2\omega}(x-2n\omega')$; on a donc enfin, en réduisant,

$$\frac{H'(o)H_1(o)}{H(x)H_1(x)}=\frac{\pi}{\omega}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{2n^2}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-2n\omega')}.$$

On établira de même, à titre d'exercice, la formule

$$\frac{H'(o)H_1(o)}{\Theta(x)\Theta_1(x)}=\frac{\pi i}{\omega}\sum(-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}\cot\frac{\pi}{\omega}[x-(2n-1)\omega'].$$

Hermite a montré l'importance que présentent les développements de ce genre pour les applications à l'Arithmétique (*Œuvres*, *loc. cit.*).

236. **Formule de décomposition dans le cas de N positif,** $N=m$. — Soit $F(u)$ une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$. Supposons que cette fonction admette les pôles simples $a, b, \ldots, l$ non deux à deux homologues, avec les résidus A, B, ..., L. L'expression

$$\Psi(u)=F(u)+A\chi_m(a,u)+B\chi_m(b,u)+\ldots+L\chi_m(l,u)$$

est une fonction aux mêmes multiplicateurs, *mais n'ayant plus de pôles*. En effet, chacune des fonctions $F(u)$, $\chi_m(a,u)$, ..., $\chi_m(l,u)$ admet les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ (n° 233). En outre, dans le voisinage de $u=a$ par exemple, on a

$$F(u)=\frac{A}{u-a}+\text{fonction holomorphe},$$

$$\chi_m(a,u)=-\frac{1}{u-a}+\text{fonction holomorphe},$$

et les autres fonctions $\chi_m(b,u)$, ..., $\chi_m(l,u)$ sont holomorphes. Dans la combinaison donnant Ψ, $\frac{1}{u-a}$ disparaît. Le même fait se produit en tous les pôles de $F(u)$. La fonction $\Psi(u)$, admettant les multiplications 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ et étant partout finie, est une des

fonctions entières $\mathfrak{E}(u)$ étudiées au n° 231. Elle est donc de la forme

$$\lambda_0 E_0(u) + \lambda_1 E_1(u) + \ldots + \lambda_{m-1} E_{m-1}(u),$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont des constantes déterminées. On a alors la formule

$$(28)\quad \begin{cases} F(u) = -A\chi_m(a, u) - B\chi_m(b, u) - \ldots - L\chi_m(l, u) \\ \qquad + \lambda_0 E_0(u) + \lambda_1 E_1(u) + \ldots + \lambda_{m-1} E_{m-1}(u). \end{cases}$$

On pourra déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ en attribuant m valeurs numériques à la variable u. Pour une étude plus détaillée de ce point, nous renverrons aux Mémoires de M. Appell.

Dans le cas des pôles multiples, chaque terme de cette formule doit être remplacé par une somme telle que

$$-A\chi_m(a, u) - A_1 \frac{d\chi_m(a, u)}{da} - \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2\chi_m(a, u)}{da^2} - \ldots$$
$$- \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}\chi_m(a, u)}{da^{\alpha-1}}.$$

Dans ces formules *il n'y a aucune relation nécessaire entre les pôles et les parties principales correspondantes*. Ainsi, quels que soient les points $a, b, \ldots, l$ et les constantes $A, B, \ldots, L, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, la fonction définie par la formule (28) admet les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$.

237. **Résumé.** — On voit que le même élément simple $\chi_m(x, y)$ peut être employé pour la décomposition des fonctions $F(u)$ à multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{N\pi ui}{\omega}}$, que N soit positif ou négatif. Quand N est négatif, $N = -m$, c'est x qui est la variable u et y qui coïncide successivement avec les pôles. Quand N est positif, $N = m$, c'est y qui est la variable u et x qui coïncide successivement avec les pôles.

CHAPITRE XIII.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS MODULAIRES.

I. — L'invariant absolu $J(\tau)$.

238. **Couples de périodes équivalentes.** — Nous avons vu (n° 21) qu'étant donné un couple de quantités ω, ω' assujetties à cette condition que le rapport $\omega' : \omega$ soit imaginaire, on peut toujours construire une fonction elliptique $p(u \mid \omega, \omega')$ admettant pour périodes 2ω, $2\omega'$. Inversement, nous allons résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction elliptique $p(u \mid \omega, \omega')$, déterminer tous les couples ω_1, ω'_1 tels que les fonctions

$$p_1 u = p(u \mid \omega_1, \omega'_1)$$

coïncident toutes avec la première.

Comme au Chapitre IV, nous nous imposerons, dès à présent et dans tout ce dernier Chapitre, la condition fondamentale que voici :

Les parties réelles $\mathcal{R}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right)$, $\mathcal{R}\left(\frac{\omega'_1}{i\omega_1}\right)$ des rapports $\frac{\omega'}{i\omega}$, $\frac{\omega'_1}{i\omega_1}$ devront être essentiellement positives.

Cette convention, d'ailleurs, n'est nullement restrictive pour le problème actuel : car, si l'on a obtenu tous les couples ω_1, ω'_1 respectant la condition précédente, l'ensemble des couples ω_1, $-\omega'_1$ fournira la solution du même problème, précisé par la convention opposée, $\mathcal{R}\left(\frac{\omega'_1}{i\omega_1}\right) < 0$.

Abordons maintenant la détermination des couples ω_1, ω'_1. Tout d'abord, si $p_1 u$ coïncide avec pu, les pôles $2\omega_1$ et $2\omega'_1$ de $p_1 u$

devront être des pôles de pu; on aura donc

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = a\omega' + b\omega, \\ \omega_1 = c\omega' + d\omega, \end{cases}$$

a, b, c, d désignant quatre entiers. Réciproquement, les pôles 2ω, $2\omega'$ de pu devront appartenir à $p_1 u$, ce qui entraîne les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega' = a_1\omega'_1 + b_1\omega_1, \\ \omega = c_1\omega'_1 + d_1\omega_1, \end{cases}$$

a_1, b_1, c_1, d_1 représentant de nouveaux entiers. Mais les expressions (2), transportées dans les équations (1), doivent les vérifier quels que soient ω_1, et ω'_1 : sinon, on en déduirait que le rapport $\omega'_1 : \omega_1$ est réel; on aura donc les relations

$$\begin{aligned} a a_1 + b c_1 &= 1, & a b_1 + b d_1 &= 0, \\ c a_1 + d c_1 &= 0, & c b_1 + d d_1 &= 1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} 1 &= (aa_1 + bc_1)(cb_1 + dd_1) - (ab_1 + bd_1)(ca_1 + dc_1) \\ &= (ad - bc)(a_1 d_1 - b_1 c_1). \end{aligned}$$

Le produit des deux entiers $ad - bc$ et $a_1 d_1 - b_1 c_1$ devant être égal à 1, on a nécessairement

$$ad - bc = \varepsilon = a_1 d_1 - b_1 c_1 \qquad (\varepsilon^2 = 1).$$

Pour déterminer ε, nous nous appuierons sur notre convention fondamentale qui nous montrera que ε est positif et, par suite, égal à 1. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha + i\beta, & \omega_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \\ \omega' &= \alpha' + i\beta', & \omega'_1 &= \alpha'_1 + i\beta'_1; \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) &= \mathcal{R}\left[\frac{(\alpha' + i\beta')(\alpha - i\beta)}{i(\alpha^2 + \beta^2)}\right] = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \mathcal{R}\left(\frac{\omega'_1}{i\omega_1}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}; \end{aligned}$$

d'après notre convention, $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ et $\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1$ seront donc positifs. Or, on tire de (1)

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= a\alpha' + b\alpha, & \alpha_1 &= c\alpha' + d\alpha, \\ \beta'_1 &= a\beta' + b\beta, & \beta_1 &= c\beta' + d\beta, \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1 = (ad - bc)(\alpha\beta' - \beta\alpha') = \varepsilon(\alpha\beta' - \beta\alpha'),$$

ce qui montre bien que ε est positif.

Établissons maintenant que *la condition obtenue est suffisante;* en d'autres termes, définissons ω_1 et ω'_1 par les formules (1) où a, b, c, d désignent quatre entiers satisfaisant à la relation

$$(3) \qquad ad - bc = 1;$$

nous allons voir que les fonctions $p(u \mid \omega_1, \omega'_1)$ et $p(u \mid \omega, \omega')$ coïncident.

Tout d'abord, les équations (1) résolues par rapport à ω' et ω donneront, en vertu de (3),

$$(2') \qquad \begin{cases} \omega' = \quad d\omega'_1 - b\omega_1, \\ \omega = -c\omega'_1 + a\omega_1. \end{cases}$$

Or il résulte de (1) que toute période $w_1 = 2m\omega_1 + 2n\omega'_1$ de la fonction $p_1 u$ est une période de pu; et, d'après (2'), toute période de pu est aussi une période de $p_1 u$. Les séries absolument convergentes qui définissent pu et $p_1 u$ sont donc composées des mêmes termes, mais rangés, chaque fois, dans un ordre différent : leurs sommes pu et $p_1 u$ sont donc identiques.

Les mêmes conclusions subsistent évidemment pour les fonctions σu et ζu correspondantes, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'une quelconque des trois égalités

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega'_1) = \sigma(u \mid \omega, \omega'),$$
$$\zeta(u \mid \omega_1, \omega'_1) = \zeta(u \mid \omega, \omega'),$$
$$p(u \mid \omega_1, \omega'_1) = p(u \mid \omega, \omega'),$$

soit vérifiée, il faut et il suffit que ω, ω', ω_1, ω'_1 *soient liés par les équations* (1) *où les entiers* a, b, c, d *satisfont à* (3).

Les fonctions σu, ζu, pu peuvent donc se construire indifféremment, soit à partir des périodes 2ω, $2\omega'$, soit à partir des périodes $2\omega_1$, $2\omega'_1$, ce que nous exprimerons en disant que les couples de périodes primitives (ω, ω') et (ω_1, ω'_1) sont *équivalents*.

239. **Réseaux de parallélogrammes équivalents.** — La remarque qui nous a permis d'identifier les séries pu et $p_1 u$ peut s'énoncer géométriquement, de la façon suivante :

Les réseaux de parallélogrammes construits, d'une part avec les périodes 2ω, $2\omega'$, *d'autre part avec les périodes* $2\omega_1$, $2\omega'_1$, *ont les mêmes sommets.*

On peut ajouter que *les aires des parallélogrammes élémentaires du réseau* $(2\omega_1, 2\omega'_1)$ *sont égales à celles des parallélogrammes élémentaires du réseau* $(2\omega, 2\omega')$.

Car, avec les notations du numéro précédent, l'aire du parallélogramme $(0, 2\omega, 2\omega+2\omega', 2\omega')$ est mesurée par le nombre positif $4(\alpha\beta'-\beta\alpha')$; et celle du parallélogramme $(0, 2\omega_1, 2\omega_1+2\omega'_1, 2\omega_1)$, par le nombre égal $4(\alpha_1\beta'_1-\beta_1\alpha'_1)$.

Enfin, le fait que les deux parenthèses précédentes sont positives peut s'interpréter de la façon suivante : quand on décrit le périmètre de chaque parallélogramme dans l'ordre 0, 2ω, $2\omega+2\omega'$, $2\omega'$, 0 ou 0, $2\omega_1$, $2\omega_1+2\omega'_1$, $2\omega'_1$, 0, on laisse chaque fois l'aire enveloppée à sa gauche.

240. **L'invariant absolu J.** — On voit de même que *les invariants* $g_2(\omega, \omega')$ et $g_3(\omega, \omega')$ *de la fonction* $p(u \mid \omega, \omega')$ *ne changent pas de valeurs* quand on substitue aux périodes 2ω et $2\omega'$ les périodes équivalentes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$: car cette substitution ne fait que modifier l'ordre des termes dans les séries absolument convergentes qui définissent g_2 et g_3; et ainsi se trouve légitimée la dénomination d'invariants que nous avons attribuée à ces quantités (nº 33).

Introduisons maintenant le rapport des périodes

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega};$$

nous aurons successivement

$$w = 2m\omega + 2n\omega' = 2\omega(m+n\tau),$$

$$g_2 = \frac{15}{4\omega^4}\sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^4},$$

$$g_3 = \frac{35}{16\omega^6}\sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^6},$$

et ces relations montrent, comme nous le savions déjà (nº 36), que g_2 et g_3 sont homogènes et de degrés -4 et -6 par rapport aux périodes; le quotient $g_2^3 : g_3^2$ est donc homogène et de degré o. Au lieu de ce quotient, considérons le nombre J qui lui est relié par la formule

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = 27\frac{J}{J-1};$$

on aura donc

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2^3}{\Delta}$$

(nº 46); J, comme $g_2^3 : g_3^2$, ne dépendra que du rapport des périodes et, de plus, il restera toujours fini, si le discriminant Δ ne s'annule pas.

Avec M. F. Klein, nous donnerons à cette fonction $J(\tau)$ le nom d'*invariant absolu*, et cette dénomination est doublement justifiée : d'abord $J(\tau)$ garde évidemment la même valeur pour l'ensemble des fonctions elliptiques $p(u \mid \lambda\omega, \lambda\omega')$ où λ varie arbitrairement; en outre, d'après ce que nous avons dit de g_2 et g_3, $J(\tau)$ ne change pas non plus quand on substitue à $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ le rapport τ_1 de deux périodes équivalentes, $2\omega'_1$ et $2\omega_1$: fait fondamental que nous préciserons au nº 242.

241. La fonction $J(\tau)$ est holomorphe dans le demi-plan positif. — Montrons d'abord que l'invariant $J(\tau)$ est une fonction holomorphe de la variable $\tau = x + iy$ dans le domaine $(\overline{\varpi})$ défini par $\varepsilon < y < \varepsilon^{-1}$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

En effet, les séries

$$\frac{g'_2}{60} = \sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^4} \quad \text{et} \quad \frac{g'_3}{140} = \sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^6}$$

sont holomorphes à l'intérieur de $(\overline{\varpi})$ (*voir* la Note IV à la fin de l'Ouvrage); la fonction $J(\tau)$ ne peut donc cesser d'être holomorphe à l'intérieur de $(\overline{\varpi})$ que si l'expression

$$\Delta = (2\omega)^{-12}(g_2'^3 - 27g_3'^2) = (2\omega)^{-12}\Delta'$$

s'annule à l'intérieur de $(\overline{\varpi})$, ce qui ne peut arriver que si Δ' lui-même s'y annule. Mais, puisque τ appartient à $(\overline{\varpi})$, on peut cons-

truire une fonction $p(u \mid 1, \tau)$ dont le discriminant (qui est $2^{-12}\Delta'$) ne peut être nul (n° 47). $J(\tau)$ est donc holomorphe à l'intérieur de $(\overline{\varpi})$; sous forme abrégée, nous dirons encore :

La fonction $J(\tau)$ est holomorphe dans le demi-plan positif (ϖ) (en entendant par là, l'ensemble des points $\tau = x + iy$ à distance finie, et d'ordonnée y positive).

242. Propriété fondamentale de la fonction $J(\tau)$. — Établissons maintenant la propriété fondamentale de la fonction $J(\tau)$:

Pour que l'on ait $J(\tau_1) = J(\tau)$, τ et τ_1 étant deux points du demi-plan positif, il faut et il suffit que τ et τ_1 vérifient la relation

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \tag{4}$$

où a, b, c, d désignent quatre entiers, tels que $ad - bc = 1$.

La condition est nécessaire : car, si τ et τ_1 appartiennent au demi-plan positif (ϖ), nous pourrons construire deux fonctions elliptiques $p(u \mid 1, \tau)$ et $p(u \mid 1, \tau_1)$ dont nous désignerons les couples d'invariants par g_2, g_3 et g_2^1, g_3^1 respectivement. Or, l'égalité $J(\tau_1) = J(\tau)$ entraîne

$$\frac{(g_2^1)^3}{(g_3^1)^2} = \frac{g_2^3}{g_3^2}; \tag{5}$$

comme on ne peut avoir simultanément $g_2 = 0 = g_3$ (sinon Δ serait nul; *cf.* n° 47), on pourra par exemple déterminer une auxiliaire λ par la relation

$$g_2^1 = \lambda^2 g_2;$$

d'après (5), l'une des solutions de l'équation précédente en λ satisfera à

$$g_3^1 = \lambda^3 g_3.$$

Posons alors $\omega = \lambda^{\frac{1}{2}}$, le choix de la racine étant arbitraire; en vertu des relations d'homogénéité (n° 36, p. 47), la fonction $p(u \mid \omega, \omega\tau_1)$ admettra pour invariants $g'_2 = \lambda^{-2} g_2^1 = g_2$ et $g'_3 = g_3$; ayant mêmes invariants que $p(u \mid 1, \tau)$, elle coïncidera avec cette dernière fonction (n° 33, p. 44). Or, l'égalité

$$p(u \mid \omega, \omega\tau_1) = p(u \mid 1, \tau)$$

entraîne (n° 238) deux relations de la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} \omega\tau_1 = a\tau + b, \\ \quad\omega = c\tau + d, \end{cases}$$

a, b, c, d étant quatre entiers de déterminant 1; et des équations (6) on déduit précisément la relation (4) que nous voulions établir.

La condition est suffisante : car, si elle est vérifiée, on pourra déterminer une quantité ω par les équations compatibles (6); les deux fonctions $p(u \mid \omega, \omega\tau_1)$ et $p(u \mid 1, \tau)$ seront identiques (n° 238) et auront alors mêmes couples d'invariants (n° 240), ce qui entraîne l'égalité des invariants absolus, $J(\tau)$ et $J(\tau_1)$.

La proposition que nous venons d'établir présente une importance capitale pour l'étude de la fonction $J(\tau)$ dans le demi-plan positif; mais avant d'aborder cette étude, il nous faut dire un mot des transformations (4).

II. — Le groupe modulaire et son domaine fondamental.

243. Substitutions linéaires. — Soient α, β, γ, δ quatre nombres quelconques (réels ou imaginaires), satisfaisant à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; posons

$$(7)\qquad \tau_1 = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

L'opération faite sur τ s'appelle une *substitution linéaire;* nous la désignerons par le symbole

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

ou, d'une façon abrégée, par une lettre unique, telle que S ; nous écrirons ainsi

$$\tau_1 = S\tau;$$

et, si τ_1 coïncide avec τ, nous dirons que τ est un *point double* de la substitution. L'expression $\alpha\delta - \beta\gamma$ est le *déterminant* de la substitution ; puisqu'il est différent de zéro, τ_1 dépend effectivement de la variable τ; de plus, on peut résoudre (7) par rapport

à τ, et l'on voit aussitôt que τ se déduit de τ_1 par la substitution

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cette substitution est dite la substitution *inverse* de S ; nous la représenterons par le symbole S^{-1}, ce qui nous permettra d'écrire

$$\tau = S^{-1}\tau_1.$$

Désignons par S' la substitution $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$; posons $\tau_2 = S'\tau_1$, et cherchons la relation entre τ_2 et τ; nous trouverons aisément

$$\tau_2 = S'(S\tau) = S''\tau,$$

avec

$$S'' = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix}.$$

Nous représenterons la substitution précédente par S'S, et nous l'appellerons le *produit* de S par S'. On vérifie sans peine que le déterminant de S'S est le produit des déterminants de S et de S'.

On définirait de même le produit SS' de S' par S; il a pour expression

$$SS' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

En général, cette substitution est différente de SS'; dans la multiplication symbolique des substitutions, on n'a donc pas le droit, généralement, d'intervertir l'ordre des facteurs. Par contre, le produit des substitutions est une opération associative : on voit immédiatement que $S''(S'S) = (S''S')S$, de sorte qu'on peut supprimer les parenthèses et désigner l'opération précédente par S''S'S.

Supposons que plusieurs substitutions consécutives d'un produit coïncident; au lieu d'écrire SS, SSS, ..., on emploiera les symboles S^2, S^3, ..., et plus généralement S^n; de même S^{-n} désignera la *puissance* $n^{\text{ième}}$ de la substitution S^{-1}. D'ailleurs, appliquée à τ, la substitution $S^{-1}S$ (ou SS^{-1}) le reproduit identiquement : c'est ce qu'on appelle la substitution *unité* (ou *identique*), et l'on peut évidemment supprimer le facteur précédent d'un produit symbolique. En définitive, on voit que, quels que soient les entiers m, n, le symbole S obéit à la relation

$$S^m S^n = S^{m+n}.$$

244. Propriété géométrique des substitutions linéaires. — Représentons le nombre τ par son image dans le plan complexe; toute substitution S (à coefficients réels ou complexes) définit une transformation du plan complexe en lui-même : celle qui remplace le point-image de τ par le point-image de $S\tau$. Indiquons une propriété fondamentale de cette transformation.

Soit $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; suivant qu'on a $\gamma \neq 0$ ou $\gamma = 0$ on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = S_4 S_3 S_2 S_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = S'_2 S'_1,$$

avec

$$S_1\tau = \tau + \frac{\delta}{\gamma}, \qquad S_2\tau = -\frac{1}{\tau}, \qquad S_3\tau = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2}\tau, \qquad S_4\tau = \tau + \frac{\alpha}{\gamma}$$

ou

$$S'_1\tau = \frac{\alpha}{\delta}\tau, \qquad S'_2\tau = \tau + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Mais, interprétées géométriquement, S_1, S_4, S'_2 sont des *translations*; S_3 (ou S'_1) est une *homothétie* par rapport à l'origine, suivie d'une *rotation* d'amplitude θ autour de l'origine, si $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2}$ $\left(\text{ou } \frac{\alpha}{\delta}\right)$ est une quantité complexe d'argument θ. Enfin S_2 est une *inversion* par rapport au cercle $|\tau| = 1$, suivie d'une *symétrie* par rapport à l'axe imaginaire.

Or, chacune des transformations précédentes *conserve les angles*, et *transforme les droites et les cercles en cercles* (ou en droites); il en sera donc de même de la substitution linéaire la plus générale.

Observons encore que si α, β, γ, δ sont réels et satisfont à $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, les translations S_1, S_4, S'_2 sont parallèles à l'axe réel; S_3 et S'_1 sont des homothéties de rapports positifs; la substitution linéaire $S\tau$ transforme donc l'axe réel en lui-même et change un point du demi-plan positif (ϖ) en un point de ce demi-plan. De plus, elle transforme les demi-circonférences et les demi-droites de (ϖ) orthogonales à l'axe réel en demi-circonférences (ou demi-droites) de (ϖ) orthogonales à cet axe, résultat qui concorde bien avec la conservation des angles.

245. Le groupe modulaire. — Par définition, un ensemble de substitutions données $S_1, S_2, \ldots, S_\nu, \ldots$ en nombre fini ou non,

$$S_\nu \tau = \frac{\alpha_\nu \tau + \beta_\nu}{\gamma_\nu \tau + \delta_\nu}$$

forme un *groupe* si l'inverse d'une quelconque des substitutions et le produit de deux quelconques d'entre elles font partie de l'ensemble ; les points correspondants τ et $S_\nu \tau$ sont dits *équivalents* par rapport au groupe. On dit encore que h substitutions d'un groupe sont *indépendantes* si aucune d'elles ne peut s'exprimer par un produit symbolique où ne figurent que les autres substitutions. Si toutes les substitutions du groupe sont identifiables à des produits où ne figurent que k substitutions indépendantes du groupe, $S_1, \ldots, S_k$, on dit que le groupe dérive des k substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_k$, qu'on appellera encore *substitutions fondamentales ou génératrices du groupe*.

Ainsi, les substitutions $\begin{pmatrix} 1 & 2m\omega + 2n\omega' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui remplacent un point u par son homologue $u + 2m\omega + 2n\omega'$ d'un autre parallélogramme de périodes (n° 18) constituent un groupe Ω dont les substitutions fondamentales sont les translations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\omega' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, actuellement les substitutions (4) constituent un groupe, Γ : car les substitutions inverses $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sont à coefficients entiers, et vérifient (3) ; de plus, si S et S' désignent deux substitutions de l'ensemble (4), le déterminant de SS' est encore égal à 1 (n° 243).

Nous appellerons ces substitutions, *substitutions modulaires*, et nous désignerons leur groupe Γ sous le nom de *groupe modulaire*. Nous savons déjà (n° 244) que Γ *transforme l'axe réel en lui-même et le demi-plan positif* (ϖ) *en lui-même ;* nous verrons bientôt que ce groupe dérive des deux substitutions fondamentales

$$U\tau = \tau + 1, \qquad V\tau = -\frac{1}{\tau}.$$

Grâce à l'introduction de cette notion nouvelle, nous pouvons énoncer le théorème du n° 242 de la façon suivante :

La fonction $J(\tau)$ *est invariante par toutes les substitutions du groupe modulaire, et par ces substitutions seulement*, ce que nous résumerons en disant :

La fonction $J(\tau)$ *appartient au groupe modulaire*. Et, dans le même sens, nous pouvons ajouter :

La fonction pu appartient au groupe de substitutions

$$Su = \pm u + 2m\omega + 2n\omega';$$

le couple $(pu, p'u)$ appartient au groupe

$$(\Omega) \qquad Su = u + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Plus généralement, à tout groupe de substitutions linéaires, on peut, sous certaines conditions, faire correspondre une fonction, ou un couple de fonctions qui lui appartiennent : ce sont les fonctions *fuchsiennes et les fonctions kleinéennes*, dont la découverte et la théorie sont dues aux mémorables recherches de H. Poincaré (*Acta math.*, t. I—V; *Œuvres*, t. II).

246. Le domaine fondamental du groupe modulaire. — Les remarques que nous avons faites au début de la théorie des fonctions elliptiques (n° 18) peuvent s'énoncer actuellement de la façon suivante :

1° On peut subdiviser le plan complexe en un réseau de parallélogrammes qui sont les transformés de l'un quelconque d'entre eux, soit P, par les substitutions Ω; et tout point du plan est équivalent (relativement à Ω) à un point et à un seul de P.

2° Il suffit de connaître une fonction elliptique dans un parallélogramme pour la connaître dans tout le plan.

De même, actuellement, comme nous allons le montrer :

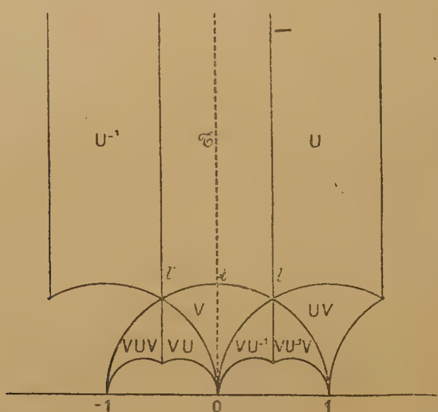
1° *On peut subdiviser le demi-plan positif en un réseau de triangles curvilignes, qui sont les transformés de l'un quelconque d'entre eux, soit* $\mathfrak{T}$, *par les substitutions du groupe modulaire* Γ; *et tout point du demi-plan est équivalent* (*relativement à* Γ) *à un point et à un seul de* $\mathfrak{T}$.

2° *Il suffit de connaître la fonction* $J(\tau)$ *dans un de ces triangles pour la connaître dans tout le demi-plan positif.*

Nous commencerons par construire un triangle $\mathfrak{T}$ qui jouit, comme nous l'établirons ensuite, de la première des propriétés précédentes; pour cette raison, nous dirons que $\mathfrak{T}$ est un *domaine fondamental* du groupe modulaire.

Dans le demi-plan positif ($\tau = x + iy$, $y > 0$) notre triangle $\mathfrak{T}$ sera limité par les deux demi-droites $2x = \pm 1$, $2y \geq \sqrt{3}$, ainsi que par l'arc de cercle $x^2 + y^2 = 1$, $4x^2 < 1$. Ce triangle est symétrique par rapport à Oy; l'un de ses sommets est rejeté à l'infini dans la direction de cet axe; les deux autres sont les points $l = e^{\frac{\pi i}{3}}$ et $l' = e^{\frac{2\pi i}{3}} = l - 1$; les trois angles correspondants sont

Fig. 37.



0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. Quant aux points de la frontière de $\mathfrak{T}$, nous les considérerons comme appartenant à $\mathfrak{T}$ s'ils satisfont à $x \geq 0$, et comme étrangers à $\mathfrak{T}$ dans le cas opposé. On verra (n° 257) que cette restriction a été introduite dans le même but que la restriction analogue du n° 18.

Appliquons à $\mathfrak{T}$ une substitution modulaire quelconque; nous le transformerons en un triangle limité par trois arcs appartenant (n° 244) à des demi-circonférences orthogonales à l'axe réel; géométriquement, l'un quelconque de ces triangles est donc défini par la donnée de ses trois sommets.

Sur la figure 37, nous avons représenté le triangle $\mathfrak{T}$ et ceux qui s'en déduisent par les substitutions U, U^{-1}, V, VU, VU^{-1}, $VU^{-1}V$, UV, VUV; les sommets des triangles VU et VU^{-1} sont,

par exemple :

$$\mathrm{VU}:\mathrm{o},\qquad \frac{l-2}{3}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{6}\qquad \text{et}\qquad l'=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{VU}^{-1}:\mathrm{o},\qquad l=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\qquad \text{et}\qquad \frac{l+1}{3}=\frac{3+i\sqrt{3}}{6};$$

observons que $\left|\frac{l-2}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\left|\frac{l+1}{3}\right|$, résultat qui nous sera utile plus loin.

Il s'agit d'établir maintenant que $\mathfrak{T}$ est bien un domaine fondamental du groupe modulaire ; et, pour cela, nous démontrerons d'abord les théorèmes suivants :

247. Théorème I. — *Deux points distincts du triangle $\mathfrak{T}$ ne peuvent être équivalents par rapport à* Γ.

Supposons, en effet, qu'il existe deux points $\tau=x+iy$, $\tau'=x'+iy'$, appartenant au triangle $\mathfrak{T}$ et transformés l'un de l'autre par la substitution $\mathrm{S}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ du groupe modulaire ; on aura donc $y'=\frac{y}{\mathrm{D}}$ avec

$$\begin{aligned}(8)\qquad \mathrm{D}&\equiv(cx+d)^2+c^2y^2\\ &=c^2(x^2+y^2-1)+\varepsilon cd(2\varepsilon x+1)+c^2-\varepsilon cd+d^2\end{aligned}$$

et $\varepsilon^2=1$. Le symbole ε ne figure que si cd n'est pas nul ; et, dans ce cas, nous choisirons ε de telle sorte que εcd soit positif. Or, puisque c et d sont entiers, la quantité

$$c^2-\varepsilon cd+d^2=\left(d-\frac{\varepsilon c}{2}\right)^2+\frac{3c^2}{4}=\left(c-\frac{\varepsilon d}{2}\right)^2+\frac{3d^2}{4}$$

est supérieure à 1, sauf si l'on a $c^2=0$ ou 1 et $d^2=0$ ou 1. L'hypothèse $c=0=d$ étant à rejeter, on aura donc toujours $c^2-\varepsilon cd+d^2\geqq 1$, l'égalité n'ayant lieu que dans l'un des trois cas suivants :

(I) $\qquad c^2=0,\qquad d^2=1$;

(II) $\qquad c^2=1,\qquad d^2=0$;

(III) $\qquad c^2=1,\qquad d^2=1\qquad (\varepsilon cd>0)$.

De plus, si τ appartient au triangle $\mathfrak{G}$, on aura

$$x^2+y^2-1>0, \quad 2\varepsilon x+1>0,$$

l'une ou l'autre de ces inégalités, suivant le cas, devant être remplacée par une égalité si τ appartient à la frontière de $\mathfrak{G}$ (ce qui exige que son abscisse x soit ≥ 0). Appliquées à (8), ces remarques montrent qu'on a toujours $D \geq 1$, et, par conséquent, $y' \leq y$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que dans l'un des trois cas suivants :

(I) $$c^2=0, \quad d^2=1,$$

$S\tau$ est de la forme $\tau'=\tau+b$;

(II) $$c^2=1, \quad d^2=0$$

et τ est sur le côté $x^2+y^2-1=0$;

(III) $$c^2=1, \quad d^2=1$$

et τ coïncide avec le sommet l (l' n'appartient pas à $\mathfrak{G}$).

La première hypothèse entraîne $x'=x+b$; or le maximum de la différence des abscisses de deux points du triangle $\mathfrak{G}$ est égal à 1 (en valeur absolue), et ce maximum ne saurait être atteint, d'ailleurs : car les deux points seraient sur deux côtés rectilignes de $\mathfrak{G}$ (symétriquement par rapport à Oy) ; un seul d'entre eux appartiendrait donc à $\mathfrak{G}$. Dès lors, on a nécessairement $b=0$, et S se réduit à la substitution identique.

Supposons maintenant $c\neq 0$ et appliquons la méthode précédente à la substitution inverse $S^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$; nous obtiendrons cette fois la condition $y\leq y'$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que dans les cas II$'$ ($c^2=1$, $a=0, \ldots$) et III$'$ ($c^2=1=a^2, \ldots$).

Ces résultats, rapprochés de ceux qui proviennent de l'étude de S, montrent que si τ et τ' sont équivalents, on a $y'=y$, et, de plus, l'un des quatre cas suivants est réalisé :

(II, II$'$). — On a $c^2=1$, $d=0=a$; S n'est autre que la substitution $\tau'=V\tau\left(=-\frac{1}{\tau}\right)$; de plus, τ et τ' sont sur le côté $x^2+y^2=1$. Effectivement, la sustitution V les échange l'un dans l'autre, pourvu qu'ils soient symétriques par rapport à Oy ; mais, de ces deux points, un seul appartient à $\mathfrak{G}$; le cas ne peut donc se pré-

senter. Si τ et τ' viennent en $\tau = i$, ils coïncident avec un point double de V (qui appartient à $\mathfrak{C}$).

(II', III). — On a $c^2 = 1 = d^2$, $a = 0$, $\tau = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = l$, $\varepsilon = -1$, d'où $cd < 0$, et S s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en tire $\tau' = l = \tau$; τ et τ' coïncident avec un point double de Σ (qui appartient à $\mathfrak{C}$).

(II-III'). — On trouve de même que S a pour expression

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on doit avoir $\tau' = l = \tau$. Ce résultat n'est pas essentiellement distinct du précédent, car $\Sigma' = \Sigma^{-1}$.

(III-III'). — On verra sans peine que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \tau' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

τ et τ' sont deux sommets différents de $\mathfrak{C}$; mais un seul d'entre eux appartient à $\mathfrak{C}$: le cas ne peut donc se présenter.

En définitive, notre théorème se trouve complètement établi ; et, de sa démonstration résultent, en outre, les conséquences suivantes :

Aucune substitution modulaire (non identique) *ne peut avoir de point double à l'intérieur de* $\mathfrak{C}$.

Deux points de la frontière de $\mathfrak{C}$, *symétriques par rapport à* Oy, *sont modulairement équivalents.*

248. Théorème II. — *Si* τ *est extérieur à* $\mathfrak{C}$, *on peut toujours trouver un point de* $\mathfrak{C}$ *équivalent à* τ.

Observons d'abord que si τ $(= x + iy)$ est extérieur à la bande

$(\mathfrak{B})$ $$4x^2 \leqq 1,$$

il existera toujours un entier, positif ou négatif, n_1, tel que la

substitution $U^{n_1}\tau\,(=\tau+n_1)$ ramène τ à l'intérieur ou sur la frontière de $(\mathfrak{M})$. Soit $\tau_1=U^{n_1}\tau$. Si τ_1 appartient à $\mathfrak{C}$, le théorème est démontré ; sinon, posons $\tau_1=x_1+iy_1$, formons

$$\tau'_1=V\tau_1\,(=-\tau_1^{-1}),$$

et ramenons τ'_1 dans $(\mathfrak{M})$ par la substitution U^{n_2}. Le procédé est évidemment général : supposons qu'on ait défini le point $\tau_p=x_p+iy_p$ de $(\mathfrak{M})$; si τ_p n'appartient pas à $\mathfrak{C}$, on trouvera un exposant n_{p+1} tel que $\tau_{p+1}=U^{n_{p+1}}V\tau_p$ appartienne à $(\mathfrak{M})$. Ceci posé, nous allons montrer qu'au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtiendra un point (soit τ_q) appartenant à $\mathfrak{C}$.

Supposons, en effet, qu'on ait toujours, quel que soit p,

$$x_p^2+y_p^2<\frac{1}{3}.$$

L'ordonnée y_{p+1} de τ_{p+1} est égale à celle de $V\tau_p$, c'est-à-dire à $\dfrac{y_p}{x_p^2+y_p^2}$, d'où

$$y_{p+1}>3y_p>3^2y_{p-1}>\ldots>3^py_1=3^py.$$

Or, si y n'est pas nul (c'est-à-dire, si τ n'est pas un nombre réel), on pourra toujours trouver un entier p assez grand pour que l'on ait $3y_{p+1}^2>1$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Il faut donc admettre que pour une certaine valeur p' de p, on a $|\tau_{p'}|\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Mais alors (n° 246, *ad fin.*) $\tau_{p'}$ appartient à l'intérieur ou à la frontière d'un des triangles VU, V, VU^{-1}, et l'un des points $U^{-1}V\tau_{p'}$, $V\tau_{p'}$ ou $UV\tau_{p'}$ appartient à l'intérieur ou à la frontière de $\mathfrak{C}$. On peut donc bien trouver une substitution modulaire S telle que $S\tau$ appartienne à $\mathfrak{C}$.

Corollaire. — Supposons maintenant que le point $S\tau$ soit *intérieur* à $\mathfrak{C}$, et montrons que S *est unique* : car s'il en existait une seconde, S', répondant à la question, les points équivalents $S\tau$ et $S'\tau$ de $\mathfrak{C}$ coïncideraient ; la substitution $S'S^{-1}$ aurait pour point double le point $S\tau$, intérieur à $\mathfrak{C}$; elle se réduit donc (n° 247, *ad fin.*) à la substitution unité, et l'on a $S=S'$.

249. **Théorème III.** — *Le groupe modulaire dérive des substitutions fondamentales* U *et* V.

En effet, soient τ un point quelconque intérieur à $\mathfrak{C}$, et S une substitution modulaire quelconque ; d'après le théorème II appliqué au point $S\tau$, on peut toujours trouver une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots, n_q$ (n_1 et n_q pouvant être nuls) tels que le point

$$\tau' = U^{n_q} V U^{n_{q-1}} \ldots U^{n_2} V U^{n_1} S\tau \qquad (\equiv S_1 \tau)$$

appartienne à l'intérieur ou à la frontière de $\mathfrak{C}$; mais τ étant intérieur à $\mathfrak{C}$, ceci exige que son équivalent τ' coïncide avec lui (théorème I) ; S_1 admet donc τ pour point double, et se réduit dès lors à la substitution unité (n° 247) ; on peut donc écrire

$$S = U^{-n_1} V \ldots U^{-n_{q-1}} V U^{-n_q}.$$

Les substitutions U et V, évidemment indépendantes, sont donc bien des substitutions fondamentales (n° 245) de Γ.

250. Application à $J(\tau)$. — Les théorèmes que nous venons de démontrer entraînent d'importantes conséquences. Tout d'abord, le procédé même par lequel nous avons établi le théorème II montre encore que *le réseau des triangles déduits de $\mathfrak{C}$ par la combinaison des substitutions* U *et* V *finit par recouvrir un point quelconque du demi-plan positif* (ϖ) ; et, d'après le théorème III, *les transformations précédentes épuisent toutes celles du groupe modulaire* Γ ; enfin (corollaire du théorème II), *deux triangles du réseau ne peuvent se recouvrir partiellement.*

A ce réseau que nous venons de construire, nous donnerons le nom de *réseau modulaire ;* ce réseau recouvre le demi-plan positif sans omission ni duplication, propriété que le réseau des parallélogrammes de périodes attaché au groupe Ω (n° 245) possédait également dans tout le plan ; et nous pouvons dire enfin que $\mathfrak{C}$ est bien un domaine fondamental (n° 246) du groupe modulaire. D'ailleurs, il est manifeste que l'un quelconque des triangles du réseau peut être substitué à $\mathfrak{C}$ comme triangle fondamental.

Revenons maintenant à la fonction $J(\tau)$ que nous avons définie dans (ϖ) ; si τ appartient au triangle du réseau transformé de $\mathfrak{C}$ par S, le point $S^{-1}\tau$ appartient à $\mathfrak{C}$, et l'on a (n° 245)

$$J(\tau) = J(S^{-1}\tau).$$

Une fois connue dans $\mathfrak{C}$, la fonction $J(\tau)$ l'est donc aussi dans (ϖ), et l'on peut dire encore que $\mathfrak{C}$ est *le domaine fondamental de* $J(\tau)$. Il

nous suffit donc d'étudier la fonction dans le domaine $\mathfrak{C}$, comme nous l'avions annoncé; c'est cette étude que nous allons entreprendre maintenant.

III. — Étude de la fonction $J(\tau)$ a l'intérieur de son domaine fondamental.

251. Théorème IV. — *L'équation* $J(\tau) - a = 0$ *n'a qu'une racine au plus dans le triangle* $\mathfrak{C}$.

Car l'égalité $J(\tau') = J(\tau)$ nécessite (n° 245) que τ' et τ soient équivalents par rapport à Γ, et le théorème devient alors une conséquence immédiate du théorème I.

On peut ajouter que si l'équation $J(\tau) - a = 0$ est satisfaite en un point τ de la frontière de $\mathfrak{C}$, la même équation est encore satisfaite au symétrique de τ par rapport à Oy.

252. Théorème V. — *En deux points,* τ *et* τ', *symétriques par rapport à l'axe imaginaire, la fonction* $J(\tau)$ *prend deux valeurs imaginaires conjuguées.*

Appelons g_2 et g_3 les invariants de la fonction $p(u \mid 1, \tau)$ et g'_2, g'_3 ceux de la fonction $p(u \mid 1, \tau')$; posons, de plus, $\tau = x + iy$, $\tau' = -x + iy$. Les séries qui définissent g_2 et g_3 étant absolument convergentes, nous pourrons écrire, par exemple,

$$\begin{aligned}16 g_3 &= 35 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(m + nx + niy)^{-6} + (-m + nx + niy)^{-6}] \\ &\quad + 2(x + iy)^{-6} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{-6} \\ &= 35 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(m + nx + niy)^{-6} + (m - nx - niy)^{-6}] \\ &\quad + 2(x + iy)^{-6} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{-6}.\end{aligned}$$

On aurait de même :

$$\begin{aligned}16 g'_3 &= 35 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(m - nx + niy)^{-6} + (m + nx - niy)^{-6}] \\ &\quad + 2(x - iy)^{-6} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{-6};\end{aligned}$$

g_3 et g'_3 sont donc imaginaires conjugués ; il en est de même de g_2 et g'_2, et par suite [n° 240] de $J(\tau)$ et $J(\tau')$.

253. **Théorème VI.** — *Dans le triangle $\mathfrak{T}$, la fonction $J(\tau)$ n'est réelle que sur le demi-axe imaginaire et sur la frontière du triangle.*

Soit toujours $\tau = x + iy$; $J(\tau)$ étant réel coïncide avec sa quantité conjuguée, et l'on a (théorème V)

$$J(x + iy) = J(-x + iy).$$

Les points $x + iy$, $-x + iy$ (le second pouvant être étranger à $\mathfrak{T}$) doivent donc coïncider ou être équivalents par rapport à Γ, ce qui établit notre proposition, en vertu du n° 251.

254. **Théorème VII.** — *La fonction $J(\tau)$ satisfait aux équations*

$$J(i) = 1 \quad \text{et} \quad J\left(\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Supposons d'abord $\tau = i$, ou $\omega' = i\omega$. Dans la formule d'homogénéité (53) (n° 36, p. 46), faisons $\mu = i$; il viendra

$$p(iu \mid i\omega, i\omega') = -p(u \mid \omega, \omega').$$

Mais, actuellement, $\omega' = i\omega$, d'où

$$p(iu \mid i\omega, i\omega') = p(iu \mid i\omega, -\omega)$$

et cette dernière fonction peut être considérée comme construite avec les périodes ω et $i\omega = \omega'$. Pour $\tau = i$, on peut donc écrire

$$(9) \qquad piu = -pu.$$

Dans les deux membres de (9), remplaçons les fonctions p par leurs développements (42) (n° 33, p. 43); de la comparaison des termes en u^4 on déduira $g_3 = 0$, d'où [n° 240] $J(i) = 1$.

Faisons maintenant $\tau = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = l$, ou $\omega' = l\omega$; comme $l^2 = -l^{-1}$, la même formule d'homogénéité donnera

$$p(lu \mid l\omega, l^2\omega) = -lp(u \mid \omega, l\omega).$$

Mais $l^2\omega = l\omega - \omega$, d'où $p(lu \mid l\omega, l^2\omega) = p(lu \mid \omega, l\omega)$, et l'on a,

pour $\tau = l$,

(10) $$p\,lu = -\,l\,p\,u.$$

Comme tout à l'heure, développons les deux fonctions autour de $u = 0$; de la comparaison des termes en u^2 il résultera $g_2 = 0$, d'où [n° 240] $J(l) = 0$. On a d'ailleurs [théorème V]

$$J\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = J(l) = 0.$$

Remarque. — On dit que la formule (9), ou (10), constitue *une formule de multiplication complexe* pour la fonction $p(u \mid \omega, \tau\omega)$ ($\tau = i$ ou l); la formule (10) a d'ailleurs été donnée déjà au n° 156, p. 267 (l est égal à la quantité $-\varepsilon^2$ du n° 156).

255. **Établissement d'une égalité fondamentale.** — Pour approfondir l'étude de la fonction $J(\tau)$ à l'intérieur du triangle $\mathfrak{T}$, *il nous faut étudier la fonction au voisinage du troisième sommet*, $\tau = i\infty$ *du triangle;* et, pour cela, nous nous appuierons sur une égalité que nous déduirons des développements en séries du Chapitre IV (Section I).

Nous avons déjà observé (nos 72 et 94) que les symboles K et iK' qui figurent dans ces développements ne constituent qu'une nouvelle notation des demi-périodes ω et ω'; K et K' ($= -i\tau$K) ne sont donc pas encore assujetties à la restriction du n° 94; ce sont deux quantités qu'on peut prendre arbitrairement sous la seule condition que leur rapport vérifie l'inégalité $\mathcal{R}\left(\frac{K'}{K}\right) > 0$ (n° 72), ce qui est précisément la convention que nous avons faite dans ce Chapitre (n° 238).

Soit donc τ un point du demi-plan positif: partons d'un couple quelconque ω, $\omega' = \tau\omega$ et construisons les fonctions $p(u \mid \omega, \omega')$ et $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, ainsi que les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 aux périodes $2K = 2\omega$ et $2iK' = 2\omega'$; posons en outre

$$e_1 = p\,\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\,\omega';$$

ces quantités vérifient, comme nous savons (n° 46), l'équation

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0.$$

Ceci fait, nous allons établir l'égalité

$$(11)\qquad \left[\frac{H(K)}{\Theta(K)}\right]^4 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

On a tout d'abord (n° 84)

$$\frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H'(o)}{\Theta(o)}\,\frac{\sigma\omega\,\sigma\omega'}{\sigma(\omega+\omega')}\,e^{\eta'\omega},$$

et l'on peut écrire (n° 78)

$$\Theta(o) = -i\,e^{\frac{\pi i}{4K}iK'}\,H(iK') = -i\,e^{\frac{\pi i\omega'}{4\omega}}\,H(iK'),$$

avec (n° 84)

$$H(iK') = H'(o)\,e^{-\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}}\,\sigma\omega',$$

d'où

$$\frac{H(K)}{\Theta(K)} = i\,e^{-\frac{\pi i\omega'}{4\omega}+\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}+\eta'\omega}\,\frac{\sigma\omega}{\sigma(\omega+\omega')} = i\,e^{\frac{\eta'\omega'}{2}+\eta'\omega}\,\frac{\sigma\omega}{\sigma(\omega+\omega')},$$

la dernière transformation résultant de l'égalité $\eta\omega'-\eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$ établie au n° 73 (p. 115). On pourra donc écrire en s'appuyant à la fin sur les formules (70) et (71) de la page 59 (où l'on aura fait $u=\omega'$)

$$\left[\frac{H(K)}{\Theta(K)}\right]^4 = e^{2\eta'\omega'+4\eta'\omega}\,\frac{\sigma^4\omega}{\sigma^4(\omega+\omega')} = e^{2\eta'\omega'}\,\frac{\sigma^4\omega}{\sigma^2(\omega+\omega')\sigma^2(\omega-\omega')}$$
$$= \frac{p(\omega+\omega')-p\omega'}{p\omega-p\omega'},$$

ce qui justifie la formule (11).

Or, nous avons appris à développer

$$H(K) = H_1(o) \qquad\text{et}\qquad \Theta(K) = \Theta_1(o)$$

en séries ou produits qui convergent quand $q = e^{\pi i\tau}$ est voisin de zéro, c'est-à-dire quand τ s'éloigne à l'infini dans le triangle $\mathfrak{T}$. Pour appliquer ces développements à l'étude de $J(\tau)$, il suffira donc d'exprimer $J(\tau)$ en fonction de $\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$.

256. Expression de $J(\tau)$ en fonction de k^2. — Posons

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2;$$

en vertu de (11), k n'est pas autre chose que le module des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ attachées à H, H_1, Θ, Θ_1 par les formules du nº 85. Cela étant, nous pourrons écrire :

$$1-k^2+k^4 = 1-k^2(1-k^2) = 1-\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{(e_1-e_3)^2}$$
$$= \frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2-(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)}{(e_1-e_3)^2}$$
$$= \frac{(e_1+e_2+e_3)^2-3(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)}{(e_1-e_3)^2} = \frac{3g_2}{4(e_1-e_3)^2}.$$

Et, d'après l'expression de Δ obtenue au nº 46 (p. 58), nous aurons encore

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2} = \frac{g_2^3}{16(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2}$$
$$= \frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2+k^4)^3}{\left(\dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}\right)^2\left(\dfrac{e_1-e_2}{e_1-e_3}\right)^2},$$

ce qui donne enfin

$$(12)\qquad J(\tau) = \frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}.$$

257. Développement de $J(\tau)$ dans le voisinage de $q=0$ ($ou\ \tau = i\infty$). — Or, d'après les formules des nºs 76 et 81, on a

$$H(K) = H_1(0) = 2q^{\frac14}\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2+n} = 2q^{\frac14}A\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n})^2,$$

$$\Theta(K) = \Theta_1(0) = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2} = A\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1})^2,$$

les séries et les produits désignant des fonctions holomorphes de q pour $|q|<1$ (nºs 76 et 80); la formule (11) donne alors

$$(13)\qquad k^2 = 16q\left(\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right)^4 = 16q\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right]^8.$$

Portons l'une ou l'autre de ces expressions de k^2 dans (12); nous verrons immédiatement que $J(\tau)$ admet le point $q=0$ comme pôle du second ordre; effectivement, le calcul donne

$$J(\tau) = \frac{1}{1728q^2}(1+c_1q^2+c_2q^4+\ldots) \equiv \frac{1}{1728q^2}f(q),$$

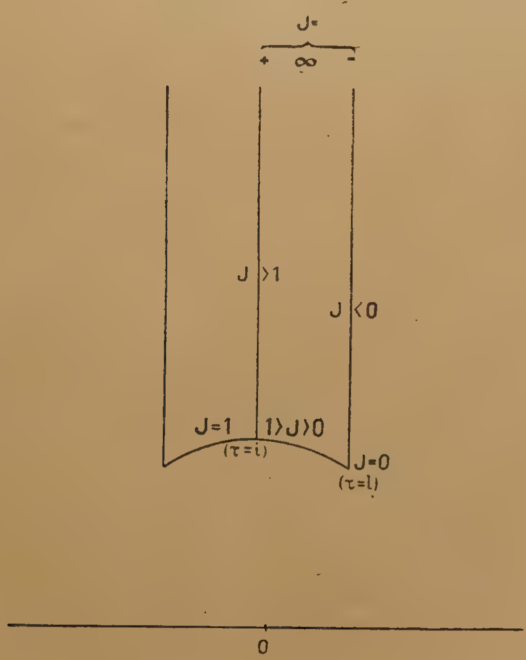
ou encore

$$(14) \qquad J(\tau) = \frac{1}{1728}\left(e^{-2\pi i\tau} + c_1 + c_2\, e^{+2\pi i\tau} + \ldots\right).$$

Les facteurs k^2 et $1 - k^2$ ne pouvant s'annuler pour $|q| < 1$ (n° 81), la fonction $f(q)$ est holomorphe pour $|q| < 1$: son développement ne peut renfermer de puissances impaires de q, car $J(\tau)$ ne peut changer quand on remplace τ par $\tau + 1$, c'est-à-dire q par $-q$; quant aux coefficients c_j du développement de $f(q)$, on vérifie sans peine qu'ils sont tous entiers. Enfin, la formule (14), applicable quand $\tau = x + iy$ satisfait à $y > y_0$ (y_0, nombre positif arbitrairement petit) montre que $|J(\tau)|$ croît indéfiniment quand τ s'éloigne indéfiniment dans le triangle $\mathfrak{G}$; elle permet, en outre, de retrouver que $J(\tau)$ est réel pour $x = 0$ et $2x = \pm 1$.

258. Étude des valeurs réelles de $J(\tau)$. — Nous pouvons étudier

Fig. 38.



maintenant les variations de $J(\tau)$ quand τ se déplace de manière que J soit réel. En effet, quand τ va du point $\tau = i$ au point $\tau = l$

sur l'arc $|\tau| = 1$, $J(\tau)$ est réel (théorème VI) et part de 1 pour aboutir à 0 (théorème VII); de plus, il décroît constamment : sinon, il existerait sur l'arc précédent deux points, non symétriques par rapport à Oy, et pour lesquels $J(\tau)$ reprendrait la même valeur, ce qui est impossible (théorème I).

Supposons ensuite que τ décrive le côté $2x = 1$, en partant de $\tau = l$; $J(\tau)$, d'abord nul, commence par décroître : sinon, il prendrait, sur ce côté, des valeurs identiques à celles qu'il acquiert sur le côté précédent, ce qui est impossible (théorème I). $J(\tau)$ décroît donc constamment et, dès lors, tend vers $-\infty$ quand τ s'éloigne indéfiniment sur le côté $2x = 1$ (n° 257).

Reste donc à étudier $J(\tau)$ sur l'axe imaginaire. Or, on voit, comme plus haut, que quand τ part de i et s'éloigne indéfiniment sur cet axe, $J(\tau)$ croît indéfiniment de 1 à $+\infty$.

Les résultats de la discussion précédente sont résumés sur la figure 38.

259. **Théorème VIII.** — *L'équation* $J(\tau) - a = 0$ (*où* a *est imaginaire*) *possède toujours une racine et une seule à l'intérieur de* $\mathfrak{T}$.

En effet, a étant donné, on peut trouver un nombre positif M, suffisamment grand pour que, quand x décroît de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$, y restant égal à M, le point

$$J' - a = \frac{1}{1728}(e^{-2\pi i\tau} + c_1) - a \qquad (\tau = x + iy)$$

décrive dans le sens direct une circonférence $\left(\text{de rayon } \frac{e^{2\pi M}}{1728}\right)$ renfermant l'origine à son intérieur. Mais, pour y assez grand, $|J - J'|$ est arbitrairement petit (n° 257); en augmentant au besoin M, on peut donc supposer que le chemin fermé $\mathfrak{C}$ décrit dans les mêmes conditions par le point $J(\tau) - a$ renferme aussi l'origine à son intérieur.

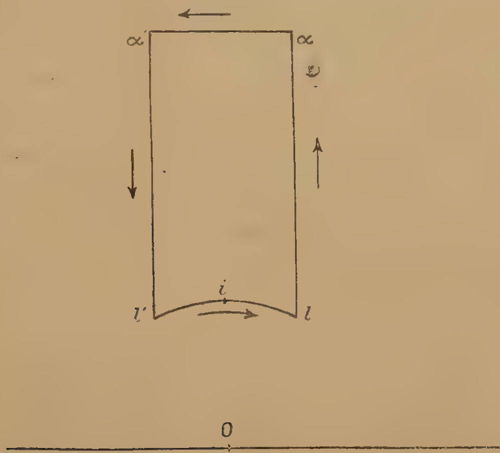
Cela étant, faisons décrire à τ le chemin fermé $C = \alpha' l' i l \alpha \alpha'$ (*fig.* 39), où l'on a posé

$$\alpha = \frac{1}{2} + i\text{M}, \qquad \alpha' = -\frac{1}{2} + i\text{M}.$$

Quand τ se déplace sur la portion de frontière $\alpha' l' i l \alpha$, le point

$J(\tau) - a$ part de $J(\alpha) - a$ pour y revenir, après avoir décrit deux fois en sens inverse un segment rectiligne parallèle à l'axe réel, et n'appartenant pas à cet axe (puisque a est imaginaire); enfin, τ variant de α' à α, $J(\tau) - a$ décrit $\mathcal{C}$ dans le sens direct.

Fig. 39.



En définitive, quand τ aura décrit le chemin C, l'argument de $J(\tau) - a$ aura augmenté de 2π; si l'on pose

$$J(\tau) - a = P(x, y) + iQ(x, y),$$

P et Q étant réels, on aura donc

$$\int_{(C)} \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2} = 2\pi. \tag{15}$$

Mais $J(\tau) - a$ étant holomorphe à l'intérieur du domaine C, limité par C [n° 241], P et Q sont continus dans D, et l'intégrale curviligne précédente ne peut avoir une valeur différente de o que si P et Q s'annulent à l'intérieur de D; $J(\tau) - a$ a donc au moins une racine à l'intérieur de D, et, par suite, à l'intérieur de $\mathfrak{T}$. Nous savons d'ailleurs qu'à l'intérieur de $\mathfrak{T}$, l'équation ne peut avoir plus d'une racine (théorème IV).

Remarques. — 1°. En vertu d'un théorème dû à Cauchy [*cf.* E. Goursat, *Cours d'Analyse*, 3e édition, t. II, p. 119] et que nous n'avons pas voulu utiliser, l'égalité (15) permettait d'établir que $J(\tau) - a$ ne possède qu'une racine à l'intérieur de D.

2°. Si l'on considère le point $\tau = i\infty$ comme appartenant à $\mathfrak{T}$, on peut dire que, dans le triangle $\mathfrak{T}$, l'équation $J(\tau) = a$ possède toujours une racine et une seule, quel que soit a.

260. Application à la théorie des fonctions elliptiques. — Le résultat que nous venons d'obtenir entraîne une conséquence des plus importantes dans la théorie des fonctions elliptiques : il permet d'établir qu'*à tout couple d'invariants*, g_2, g_3, *satisfaisant à* $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, *correspond une fonction elliptique* pu *et une seule admettant ces invariants;* c'est la justification du postulat fondamental du n° 34.

En effet, g_2 et g_3 étant donnés (sous la restriction précédente), l'équation

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

admettra une racine finie τ_0 dans le triangle fondamental ; et toutes les autres racines de l'équation sont équivalentes à τ_0. Or, considérons la fonction $p(u \mid 1, \tau_0)$; ses invariants g'_2, g'_3, ... satisfont à la relation

$$\frac{g_2'^3}{g_2'^3 - 27g_3'^2} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2};$$

comme au n° **242**, ceci exige qu'il existe un nombre λ tel que $g'_2 = \lambda^4 g_2$, $g'_3 = \lambda^6 g_3$; dès lors, la fonction $p(\lambda u \mid \lambda, \lambda\tau_0)$ répond à la question ; et elle est déterminée sans ambiguïté, car si l'on remplace τ_0 par un de ses équivalents, la fonction précédente ne change pas (n° 238).

IV. — La fonction modulaire $k^2(\tau)$.

261. Les fonctions modulaires. — La fonction $J(\tau)$ que nous venons d'étudier est la plus simple des *fonctions modulaires :* d'une façon générale, on désigne habituellement sous ce nom *toute fonction* $\varphi(\tau)$ *qui jouit de la double propriété d'être uniforme en* τ, *et d'être reliée à* $J(\tau)$ *par une relation algébrique*

$$f(\varphi, J) = 0.$$

Ainsi, en vertu des relations (13) et (12), les fonctions $k^2(\tau)$ et $\sqrt[4]{k(\tau)}$ sont des fonctions modulaires. Historiquement, l'étude

de ces fonctions a précédé celle de l'invariant $J(\tau)$: ce sont les fonctions $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ qui ont été utilisées par Hermite dans ses célèbres recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

La fonction $k^2(\tau)$ joue, pour les intégrales de Legendre et les fonctions de Jacobi, un rôle analogue à celui de l'invariant $J(\tau)$ pour les symboles de Weierstrass ; nous dirons donc quelques mots de la fonction précédente. D'ailleurs, la théorie tout élémentaire que nous allons exposer se rapproche en beaucoup de points de celle de la fonction $J(\tau)$, ce qui nous permettra d'abréger les détails des démonstrations.

262. **Les six transformations linéaires du module k^2.** — Considérée comme équation en k^2, l'équation (12) est du sixième degré ; nous allons montrer que *les six racines de cette équation s'expriment par des fonctions homographiques de l'une quelconque d'entre elles.*

Soient τ_0 et $\tau'_0 = S\tau_0 \equiv \dfrac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d}$ deux points équivalents du demi-plan positif (ϖ) ; relions ces deux points par un chemin continu quelconque $\mathfrak{L}$ appartenant à (ϖ). Lorsque τ décrira le chemin $\mathfrak{L}$, $J(\tau)$ décrira un chemin fermé le ramenant à sa valeur initiale, $J(\tau_0)$; l'opération terminée, l'équation

$$(12_0) \qquad J(\tau_0) = \frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2},$$

primitivement vérifiée par k^2, n'aura pas été modifiée ; par suite, pendant le déplacement du point τ, le point $k^2(\tau)$ aura décrit un chemin dont l'origine, $k^2(\tau_0)$, et l'extrémité, $k^2(\tau'_0)$, sont nécessairement deux racines de (12_0).

Inversement, nous allons montrer que, *si l'on fait varier de toutes les façons possibles la substitution* S, *l'expression* $k^2\left(\dfrac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d}\right)$ *prend, en tout, six valeurs, généralement distinctes, qui, dès lors, coïncident nécessairement avec les six racines de* (12_0).

A cet effet, rappelons-nous d'abord que nous avons posé (n° 256)

$$k^2(\tau_0) = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{p(\omega+\omega')-p\omega'}{p\omega-p\omega'},$$

la fonction pu étant construite avec les périodes 2ω et $2\omega' = 2\tau_0\omega$. Or, effectuer sur τ_0 la substitution S revient à remplacer 2ω et $2\omega'$ par les périodes équivalentes

$$(16) \qquad \begin{cases} 2\omega'_1 = 2a\omega' + 2b\omega, \\ 2\omega_1 = 2c\omega' + 2d\omega. \end{cases}$$

Dans cette transformation, la fonction pu ne change pas; tout revient donc à calculer $p\omega_1$, $p(\omega_1 + \omega'_1)$ et $p\omega'_1$. Or, convenons de dire que les deux substitutions

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

sont congrues entre elles (mod. 2) lorsqu'on aura (*cf.* n° **121**, p. 181)

$$a' \equiv a, \qquad b' \equiv b, \qquad c' \equiv c, \qquad d' \equiv d \quad (\text{mod. } 2).$$

Il est clair que les transformés de $k^2(\tau_0)$ par deux substitutions congrues entre elles (mod. 2) sont identiques; on pourra donc supposer que la substitution S a été remplacée par une substitution congrue, S', et dont les éléments a', b', c', d' sont égaux à 0 ou à ± 1. Mais, en vertu de (3), l'un des produits $a'd'$ et $b'c'$ est nécessairement égal à 0 et l'autre à ± 1, ce qui montre que S' coïncide nécessairement avec l'une des six substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons, par exemple, la seconde; nous aurons dans ce cas, d'après (16),

$$p\omega_1 = p\omega = e_1, \qquad p(\omega_1 + \omega'_1) = p(2\omega + \omega') = e_3,$$
$$p\omega'_1 = p(\omega + \omega') = e_2;$$

e_1, e_2, e_3 seront donc remplacés respectivement par e_1, e_3, e_2 et k^2, par $\dfrac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \dfrac{k^2}{k^2 - 1}$.

Par des calculs analogues, on formera le Tableau suivant :

(A)

1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$	e_1, e_2, e_3	k^2
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{U}$	e_1, e_3, e_2	$\dfrac{k^2}{k^2-1}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{V}$	e_3, e_2, e_1	$1-k^2$
4	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{UV}$	e_3, e_1, e_2	$1-\dfrac{1}{k^2}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{VU}^{-1}$	e_2, e_3, e_1	$\dfrac{1}{1-k^2}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{VU}^{-1}\mathrm{V}$	e_2, e_1, e_3	$\dfrac{1}{k^2}$

(En regard de chacune des six substitutions auxquelles peut être congrue S, on a donné son expression en fonction des substitutions génératrices U et V, la permutation subie par e_1, e_2, e_3, et la valeur qui en résulte pour k^2.)

Les résultats exprimés par le Tableau suffisent à justifier notre assertion ; les six valeurs généralement distinctes de $k^2\left(\dfrac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d}\right)$ sont

$$(17) \qquad k^2, \quad \frac{k^2}{k^2-1}, \quad 1-k^2, \quad 1-\frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{1-k^2}, \quad \frac{1}{k^2}$$

[en écrivant k^2 pour abréger, au lieu de $k^2(\tau_0)$]. Effectivement, un calcul direct vérifie aisément que si l'une des six quantités (17) satisfait à (12_0), il en est de même des cinq autres.

On reconnaît dans les six quantités (17) *les six valeurs du rapport anharmonique de* e_1, e_2, e_3 et ∞ : ce rapprochement n'a d'ailleurs rien d'imprévu, puisque les substitutions modulaires ont précisément pour effet de permuter e_1, e_2, e_3 de toutes les six manières possibles dans le rapport (13).

En égalant successivement k^2 à chacune des cinq autres racines (17) on verra facilement que deux quantités (17) ne peuvent être égales que dans les deux cas suivants :

1° $k^2 = -1, \frac{1}{2}$ ou 2; et alors les six racines (17) deviennent égales, deux par deux, aux valeurs $-1, \frac{1}{2}, 2$; les quatre points e_1, e_2, e_3, ∞ forment une division *harmonique;*

2° $k^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; et alors les six racines (17) deviennent égales, trois par trois, aux valeurs $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; on dit que les quatre points e_1, e_2, e_3, ∞ forment une division *équianharmonique.*

Pour cette raison, les fonctions elliptiques correspondantes sont dites, suivant le cas, *du type harmonique* ou *du type équianharmonique.*

Dans le premier cas, il résulte de (12) que $J(\tau) = 1$; g_3 est donc nul (n° 240) et τ équivalent à i (n° 254). Nous retrouvons les fonctions lemniscatiques [n° 67]; elles ont été construites par Gauss dès 1797, et il semble bien que ce sont les premières fonctions elliptiques qui aient été formées (*cf.* Gauss, *Werke*, t. III, p. 404). Dans le second cas, on a $J = 0$, $g_2 = 0$, et τ est équivalent à l (n° 254).

Rappelons que dans les deux cas, il existe une formule de multiplication complexe (n° 254).

263. **Le groupe G et ses substitutions fondamentales.** — L'examen du Tableau (A) conduit immédiatement à la proposition suivante :

Pour que $k^2(\tau)$ reste invariant par une substitution modulaire S, il faut et il suffit qu'elle soit congrue (mod. 2) *à la substitution unité;* en d'autres termes, on doit avoir

$$S = \begin{pmatrix} 2a'+1 & 2b' \\ 2c' & 2d'+1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

a', b', c', d' étant quatre entiers.

L'inverse d'une substitution (18) et le produit de deux substitutions (18) sont encore du type (18); les substitutions modulaires qui conservent $k^2(\tau)$ constituent donc un groupe (n° 245), ce qui, d'ailleurs, était évident *a priori.* On dit que ce groupe, G, est

contenu dans le groupe modulaire Γ, ou encore qu'il est *un sous-groupe de* Γ.

Nous allons établir que G dérive (n° 245) des deux substitutions fondamentales

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reproduisons la démonstration d'Hermite (*Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, 4e édition, p. 250).

On a évidemment

$$P^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre d'abord que P et Q sont indépendantes ; désignons alors par $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une substitution quelconque de G ; il viendra

$$SP^m = \begin{pmatrix} a & 2am + b \\ c & 2cm + d \end{pmatrix}.$$

Or, on peut déterminer l'entier m $\left(\gtreqless 0\right)$ de telle sorte qu'on ait

$$|2am + b| < |a|;$$

d'ailleurs le cas de l'égalité ne peut pas se présenter, car a et b ne seraient pas premiers entre eux, et (3) ne serait pas vérifiée. On aura donc

$$SP^m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv S_1,$$

avec

$$a_1 = a, \qquad |b_1| < |a| \qquad (\text{et } a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1).$$

On montrera de même qu'on peut déterminer un entier n tel que

$$SP^m Q^n = S_1 Q^n = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \equiv S_2$$

avec

$$|a_2| < |b_1|, \qquad b_2 = b_1.$$

Opérons sur S_2 comme sur S et ainsi de suite ; nous formerons une suite de substitutions modulaires

$$S_g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{pmatrix}$$

satisfaisant aux conditions

$$\ldots > |a_{2g'}| > |b_{2g'+1}| > |a_{2g'+2}| > \ldots.$$

Il existera donc une valeur de g pour laquelle on aura, soit $a_g = 0$, soit $b_g = 0$, ce qui permettra d'écrire

$$(19) \qquad S = T P^{m_1} Q^{n_1} P^{m_2} Q^{n_2} \ldots P^{m_j} Q^{n_j},$$

m_1 ou n_j pouvant être nul, et T étant de l'une ou l'autre des deux formes

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

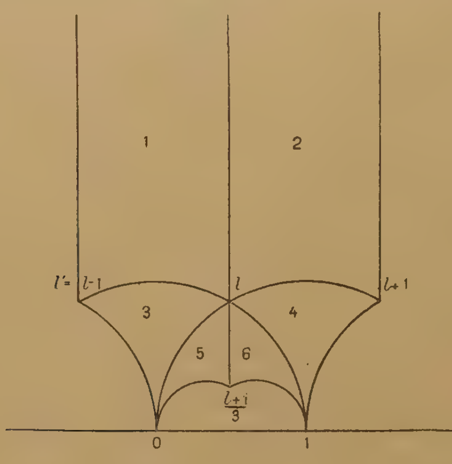
Mais P, Q, S appartenant à G, il en est de même de T, ce qui exclut la forme T_2; quant à T_1, elle vérifiera la condition $ad = 1$; on aura donc $a = 1 = d$, et c sera un nombre pair, $2q$, ce qui donnera

$$T = Q^q,$$

égalité qui, jointe à (19), établit notre proposition.

264. Le domaine fondamental de la fonction $k^2(\tau)$. — Considérons le domaine fondamental $\mathfrak{D}$ de la fonction $J(\tau)$ et ses six

Fig. 40.



transformés par les substitutions $1, \ldots, 6$ du Tableau (A); leur ensemble constitue un domaine d'un seul tenant $\mathfrak{D}'$ (*fig.* 40) tel

qu'en six points modulairement équivalents, appartenant chacun à un triangle différent de $\mathfrak{D}'$, la fonction $k^2(\tau)$ prend respectivement les six valeurs de la forme (17) qui, substituées au second membre de (12), lui donnent la même valeur numérique. Les numéros de la figure 40 précisent la distribution des six valeurs : si τ est un point du domaine 1 ($\equiv \mathfrak{T}$), la fonction $k^2(\tau)$ prend au point modulairement équivalent du triangle n la valeur donnée par la $n^{\text{ième}}$ ligne du Tableau (A); on pourra se reporter aussi à la figure 37.

Ceci posé, nous allons montrer que si b est un nombre quelconque, il existera toujours un point τ de $\mathfrak{D}'$ et un seul, tel que l'on ait

$$k^2(\tau) - b = 0. \tag{20}$$

En effet, l'équation précédente entraîne

$$\frac{[1 - k^2(\tau) + k^4(\tau)]^3}{k^4(\tau)[1 - k^2(\tau)]^2} = \frac{(1 - b + b^2)^3}{b^2(1-b)^2}, \tag{21}$$

c'est-à-dire

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - b + b^2)^3}{b^2(1-b)^2}.$$

Or, dans le triangle $\mathfrak{T}$, cette dernière équation admet toujours une racine τ_0 et une seule; d'autre part, nous savons que l'une quelconque des six racines de (21) est de la forme $k^2\left(\frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d}\right)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désignant l'une quelconque des six substitutions de (A). Considérons alors l'ensemble des points modulairement équivalents à τ_0 et appartenant à $\mathfrak{D}'$; ces points sont au nombre de six et appartiennent chacun à l'un des six triangles de $\mathfrak{D}'$: il en est donc un, et un seul qui satisfait à (20).

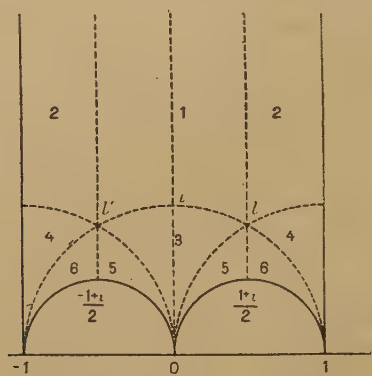
Le domaine $\mathfrak{D}'$ est donc bien un domaine fondamental pour la fonction $k^2(\tau)$ et pour le groupe G ; mais, afin de simplifier l'étude de $k^2(\tau)$, il est préférable de substituer à $\mathfrak{D}'$ un nouveau domaine fondamental, $\mathfrak{D}$, symétrique par rapport à Oy ; la formation de $\mathfrak{D}$ repose sur la remarque suivante :

Soient R un domaine contenu dans $\mathfrak{D}'$, et C la frontière commune à $\mathfrak{D}'$ et R ; appelons R' et C' les transformés de R et C par une substitution S de G. Formons alors le domaine $\mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}' - R + R'$,

en convenant, par exemple, de regarder C comme appartenant à $\mathfrak{D}''$, et C′ comme étrangère à $\mathfrak{D}''$: il est clair que dans $\mathfrak{D}'$ l'équation (20) aura une racine et une seule. D'ailleurs, on pourra procéder sur $\mathfrak{D}''$ comme sur $\mathfrak{D}'$, et en déduire de même un nouveau domaine fondamental.

Cela étant, prenons pour R la portion de $\mathfrak{D}'$ satisfaisant à $x > 1$, et pour R′ le transformé de R par P^{-1} ; puis, du domaine résultant, supprimons la région $x^2 + y^2 < x$, et remplaçons-la par sa transformée par Q^{-1} ; nous obtenons ainsi un domaine $\mathfrak{D}$, symétrique par rapport à Oy, et représenté ci-contre

Fig. 41



(sur la figure 41, les numéros ont la même signification que sur la figure 40). D'après la convention adoptée plus haut, les points de la frontière de $\mathfrak{D}$, qui sont considérés comme appartenant à $\mathfrak{D}$, sont ceux qui satisfont à $x \geqq 0$. On observera d'ailleurs qu'à tout point τ' du côté $\left\{\begin{matrix} x = -1 \\ x^2 + y^2 = -x \end{matrix}\right\}$ de $\mathfrak{D}$ correspond un point $\tau'' = \left\{\begin{matrix} P\tau \\ Q\tau \end{matrix}\right\}$, équivalent par rapport à G, et situé sur le côté $\left\{\begin{matrix} x = 1 \\ x^2 + y^2 = x \end{matrix}\right\}$; et l'on verra sans peine que les points τ' et τ'' sont symétriques par rapport à Oy.

Ces propriétés rapprochent le domaine $\mathfrak{D}$ du triangle $\mathfrak{T}$; c'est le domaine $\mathfrak{D}$ que nous adopterons comme domaine fondamental pour la fonction $k^2(\tau)$ et pour le groupe G.

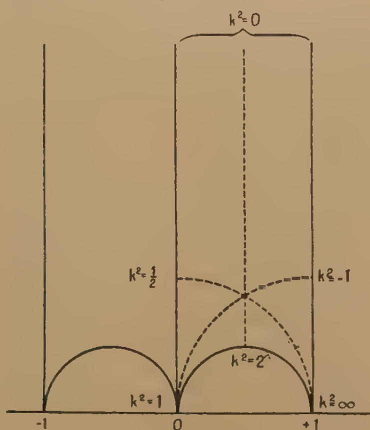
265. **Distribution des valeurs réelles de $k^2(\tau)$.** — D'après (13), si τ_1 et τ_2 sont symétriques par rapport à Oy, $k^2(\tau_1)$ et $k^2(\tau_2)$ sont

imaginaires conjugués; sur l'axe imaginaire, $k^2(\tau)$ est donc réel; et, puisque sur la frontière de $\mathfrak{D}$, $k^2(\tau')$ et $k^2(\tau'')$ (n° 264) sont à la fois égaux et imaginaires conjugués, leur valeur commune est réelle. Ainsi, $k^2(\tau)$ est réel sur Oy et sur la frontière positive de $\mathfrak{D}$, et en ces points seulement de $\mathfrak{D}$ [*cf.* n° 253].

Étudions d'abord la variation du module sur l'axe imaginaire, ce qui est le cas le plus important pour les applications. D'après (13), $k^2(\tau)$ tend vers o quand τ s'éloigne indéfiniment sur Oy; d'ailleurs aux points iy et iy^{-1}, k^2 prend deux valeurs dont la somme est 1 [Tableau (A), lignes 1 et 3]. Pour $\tau = 0$, on a donc $k^2 = 1$, et pour $\tau = i$, $k^2 = \frac{1}{2}$. Comme plus haut (n° 258), on voit que si l'on fait $\tau = iy$, $k^2(\tau)$ croîtra constamment de o à 1 quand y décroîtra de $+\infty$ à o.

Ce cas étudié, il suffit de rapprocher la figure 41 du Tableau (A) pour obtenir les variations de $k^2(\tau)$ quand τ décrit la frontière

Fig. 42.



de $\mathfrak{D}$. Ainsi, quand τ va de o à $+1$ sur la demi-circonférence $x^2 + y^2 - x = 0$, en passant par le point $\tau = \frac{1+i}{2}$, k^2 croît de 1 à $+\infty$ en passant par la valeur 2; et pour $\tau = 1 + iy$, k^2 croît de $-\infty$ à o lorsque y croît de o à $+\infty$; il est égal à -1 pour $\tau = 1 + i$.

Ces variations sont indiquées sur la figure 42.

Enfin, comme précédemment (n° 259), en étudiant les varia-

tions de l'argument de $k^{-2}(\tau) - a$ sur la frontière de $\mathfrak{D}$, on vérifierait qu'à toute valeur (différente de 0, 1 ou ∞) attribuée à k^2 correspond un couple de périodes $2K$, $2iK'$, telles que les fonctions de Jacobi construites avec ces périodes admettent précisément k^2 pour module (*cf.* p. 439); c'est la justification du postulat du n° 97. D'ailleurs, on pourra toujours choisir K et K' de telle sorte que le multiplicateur g des fonctions (n° 94) soit égal à 1.

266. Transformation du premier ordre des fonctions de Jacobi. — Servons-nous des résultats précédents pour rechercher ce que deviennent les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ de Jacobi quand on remplace le rapport $\tau = \frac{iK'}{K}$ par un de ses équivalents relativement à Γ; d'ailleurs, *nous supposerons essentiellement que le multiplicateur est égal à* 1 *pour toutes les fonctions qui figureront ci-dessous*.

Dans ces conditions, une fonction de Jacobi est pleinement déterminée pour toute valeur attribuée à k^2; si l'on effectue sur τ toutes les substitutions du groupe modulaire Γ, la fonction prendra en tout six formes distinctes; elle ne pourra rester invariante que par les substitutions du sous-groupe G de Γ. A cet égard, les fonctions de Jacobi se comportent donc moins simplement que la fonction pu de Weierstrass, qui reste invariante par une substitution modulaire quelconque; et l'on pourrait montrer que si l'inversion des intégrales elliptiques (Chap. VII et VIII) est plus simple par les fonctions de Weierstrass que par celles de Jacobi, la raison en tient essentiellement au fait qui vient d'être signalé.

Chacune des six formes que peut revêtir une fonction de Jacobi, soumise à une substitution modulaire quelconque, s'appelle *une transformée du premier ordre de la fonction;* pour déterminer les six transformées de ces fonctions, il suffit évidemment de rechercher l'effet des substitutions fondamentales U et V (n° 249).

I. *Transformation des fonctions de Jacobi correspondant à* $U\tau = \tau + 1$. — La substitution précédente remplace $q = e^{\pi i \tau}$ par $-q$; K et K' deviennent respectivement

$$K_1 = \lambda K \qquad \text{et} \qquad K'_1 = \lambda(K' - iK),$$

le facteur λ devant être choisi de façon à vérifier la condition au

multiplicateur. Or, d'après les expressions des fonctions entières de Jacobi (n^{os} 75 et 76), on a

$$\begin{aligned}
H\,(\lambda u \mid \lambda K, \lambda K' - \lambda i K) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\, H\,(u \mid K, iK'),\\
H_1(\lambda u \mid \lambda K, \lambda K' - \lambda i K) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\, H_1(u \mid K, iK'),\\
\Theta\,(\lambda u \mid \lambda K, \lambda K' - \lambda i K) &= \Theta_1\,(u \mid K, iK'),\\
\Theta_1(\lambda u \mid \lambda K, \lambda K' - \lambda i K) &= \Theta\,(u \mid K, iK'),
\end{aligned}$$

et la condition au multiplicateur s'écrit (n^o 94)

$$\frac{2\lambda K}{\pi} = \Theta_1^2(0 \mid \lambda K, \lambda K' - \lambda i K) = \Theta^2(0 \mid K, iK'),$$

mais on a

$$\frac{2K}{\pi} = \Theta_1^2(0 \mid K, iK'),$$

puisque le multiplicateur des premières fonctions était l'unité ; le rapprochement des deux équations précédentes donne $\lambda = k'$ (n^o 85); de plus, le nouveau module k_1 est égal à

$$\frac{H_1^2(0 \mid \lambda K, \lambda K - \lambda i K')}{\Theta_1^2(0 \mid \lambda K, \lambda K - \lambda i K')} = \frac{ik}{k'}.$$

On en déduit finalement

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right) &= k'\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}\\
\operatorname{cn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right) &= \frac{\operatorname{cn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}\\
\operatorname{dn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\operatorname{dn}(u;k)}
\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{aligned} k_1 &= \frac{ik}{k'}\\ k'_1 &= \frac{1}{k'}\end{aligned}\right).$$

II. *Transformation des fonctions de Jacobi correspondant à* $V\tau = -\frac{1}{\tau}$. — La substitution $V\tau = -\frac{1}{\tau}$ remplace K et K' par $\mu K'$ et μK ; au facteur μ près, les formules de transformation pour les fonctions entières de Jacobi ont été données au n^o 82 ; on en déduit aisément :

$$\frac{2\mu K'}{\pi} = \frac{1}{B^2}\Theta_1^2(0 \mid K, iK') = \frac{K'}{K}\frac{2K}{\pi},$$

d'où $\mu = 1$; d'ailleurs, le nouveau module k_2 est égal à k', et l'on

a aussi $k'_2 = k$. On trouve aisément :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(iu;k') &= i\,\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)} \\ \operatorname{cn}(iu;k') &= \frac{1}{\operatorname{cn}(u;k)} \\ \operatorname{dn}(iu;k') &= \frac{\operatorname{dn}(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} k_2 = k' \\ k'_2 = k \end{pmatrix}.$$

Sous une autre forme, les relations ont été écrites au n° 107.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIII.

1. Les intégrales

$$L = \int_C \frac{ds}{y}, \qquad (ds^2 = dx^2 + dy^2), \qquad A = \int\int_D \frac{dx\,dy}{y^2}$$

sont des *invariants* pour les substitutions linéaires à coefficients réels : en d'autres termes, la première (ou la seconde) reprend la même valeur pour deux arcs de courbe C, C' (ou pour deux domaines, D, D') transformés l'un de l'autre par une substitution linéaire. Ces invariants sont appelés la « longueur non euclidienne de l'arc C » (ou « l'aire non euclidienne du domaine D »).

Évaluer l'aire non euclidienne du triangle fondamental $\mathfrak{T}$; et, plus généralement, montrer que l'aire non euclidienne d'un triangle limité par trois circonférences orthogonales à l'axe réel, et se coupant sous les angles α, β, γ est égale à $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

2. Une substitution linéaire à coefficients réels est dite *elliptique* lorsque ses points doubles (n° 243) sont imaginaires conjugués, *parabolique* lorsqu'ils sont confondus, *hyperbolique* lorsqu'ils sont réels. Montrer que, lorsqu'une substitution modulaire est elliptique, elle est de la forme SVS^{-1}, ou $S(VU^{-1})S^{-1}$ ou $S(UV)S^{-1}$, S étant une substitution modulaire quelconque; si la substitution modulaire est parabolique, elle est de la forme SU^nS^{-1}.

[On peut s'appuyer sur ce fait que les coefficients a, b, c, d de la substitution vérifient dans le premier (ou le second) cas la condition

$$|a+d| < (\text{ou} =)\, 2\,;$$

on peut encore remarquer qu'un point double de la substitution est nécessairement équivalent à un sommet de $\mathfrak{T}$.]

3. Soit $\mathfrak{C}'$ le « demi-triangle » dont les points appartiennent à $\mathfrak{C}$ et satisfont à $x \geqq 0$; on désigne par τ_0 l'imaginaire conjugué de τ : montrer que les opérations

$$\tau' = -\tau_0, \qquad \tau' = -\tau_0 + 1, \qquad \tau' = \tau_0^{-1}$$

représentent des *réflexions* (symétries ou inversions) par rapport aux côtés de $\mathfrak{C}'$. Le réseau modulaire (n° 230) peut être subdivisé en un réseau de demi-triangles qui se déduisent tous de $\mathfrak{C}'$ par des réflexions successives sur les côtés des demi-triangles du réseau.

4. Vérifier à l'aide de la formule (12) que $J - 1$ est le carré d'une fonction rationnelle de k^2.

5. En groupant convenablement les termes des séries $g_2(\omega, \omega')$ ou $g_3(\omega, \omega')$, montrer directement que g_2 (ou g_3) s'annule pour $\tau = l$ (ou $\tau = i$).

[Par exemple, pour $\tau = i$, on groupera dans $g_3(\omega, \omega')$ les termes d'indices m, n; $-n, m$].

6. Chercher le signe de i dans $J(\tau)$ lorsque τ est intérieur à $\mathfrak{C}$ et n'est pas sur Oy. Problème analogue pour $k^2(\tau)$, quand τ est intérieur à $\mathfrak{O}$.

7. Étudier la fonction inverse $\tau(J)$. — Cette fonction est partout holomorphe, sauf aux points o, 1, ∞ où elle est multiforme. La fonction possède une infinité de branches qui se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions de Γ. — Que devient $\tau(J)$ quand J décrit un contour fermé autour de $J = 0$, $J = 1$ ou $J = \infty$?

$\left[\text{Dans le voisinage de } J = 1, \text{ par exemple, on a } \tau = i + \alpha(J-1)^{\frac{1}{2}} + \ldots\right]$

8. Si l'on désigne par τ', τ'', τ''' les dérivées successives de la fonction $\tau(J)$, l'expression

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2$$

reprend la même valeur pour deux branches quelconques de la fonction $\tau(J)$: c'est une fonction uniforme de J qui ne peut avoir comme singularités que $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$. Montrer que $J = 0$ et $J = 1$ sont des pôles de la fonction, et que $J = \infty$ en est un zéro. En déduire que la fonction cherchée a pour expression

$$R(J) = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(J-1)^2} + \frac{23}{72J(1-J)}.$$

[La conclusion résulte de ce que la différence entre la fonction cherchée et $R(J)$ est de la forme $AJ^{-1} + B(J-1)^{-1}$ et devrait admettre $J = \infty$ comme zéro triple.]

Former l'équation différentielle du troisième ordre vérifiée par la fonction $J(\tau)$.

9. **Théorème de M. E. Picard pour les fonctions entières.** — Montrer qu'une fonction entière $f(z)$ prend nécessairement à distance finie toute valeur finie, à l'exception peut-être d'une au plus.

{S'il y avait deux valeurs exceptionnelles A et B, la fonction

$$\varphi(z) = \tau\left[\frac{f(z)-A}{B-A}\right]$$

serait entière, avec le coefficient de i toujours >0; et $e^{i\varphi(z)}$ ne satisferait pas au théorème du n° 7; pour plus de détails, *voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 251 et t. III, p. 365.}

10. Rechercher les substitutions fondamentales de Γ par la méthode du n° 263, et celles de G par la méthode du n° 249.

11. Montrer que dans le domaine $\mathcal{D}$, l'équation $k^2(\tau) - a = 0$ a toujours une racine, en étendant la méthode du n° 259 (*voir* aussi Whittaker et Watson, *Modern Analysis*, 2e édition, p. 475).

12. Soit $k^2(\tau) = \alpha + i\beta$ (α et β réels); trouver la relation que vérifient α et β lorsque τ est sur un côté du réseau modulaire (n° 250).

[On s'appuie sur le tableau (A) et sur le fait que $k^2(\tau_1)$ et $k^2(\tau_2)$ sont imaginaires conjugués (n° 265); par exemple, pour $|\tau - 1| = 1$, on trouve $|k^2| = 1$.]

13. On fait tendre k^2 vers 0 ou vers 1; rechercher les limites des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, sans l'appuyer, comme au n° 98, sur l'égalité (16) du n° 97.

[Par exemple, pour $k^2 = 0$, τ est équivalent, relativement à G, au sommet infiniment éloigné de $\mathcal{D}$; on peut donc prendre $\mathcal{R}(K' : K) = +\infty$; q tend vers 0; et l'expression de $\operatorname{sn} u$ au moyen de $H(u)$ et $\Theta(u)$ montre que la limite de $\operatorname{sn} u$ est $\sin\dfrac{\pi u}{2K}$].

NOTES.

NOTE I.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE.

Dans l'Ouvrage, nous avons admis sans démonstration (n° 7) que toute fonction entière $f(u)$ dont le module reste inférieur à un nombre fixe, quel que soit u, se réduit nécessairement à une constante. Pour établir ce théorème, supposons que dans le développement taylorien de $f(u)$ autour de $u = 0$, les coefficients de u, u^2, ..., u^{n-1} soient nuls, celui de $u^n (n \geqq 1)$ ne l'étant pas; on aura donc

$$f(u) = c_0 + u^n(c_n + c_{n+1} u^{n+1} + \ldots) \equiv c_0 + u^n f_1(u).$$

Tout revient à démontrer que l'hypothèse $c_n \neq 0$ est inadmissible.

Or $|f(u)|$ restant borné quel que soit u, il faut que $f_1(u)$ tende vers zéro quand $|u|$ croît indéfiniment; on pourra donc décrire un cercle $C(|u| = R)$ le long duquel on aura

$$(1) \qquad |f_1(u)| < |c_n|.$$

Mais la fonction $|f_1(u)|$ est continue pour $|u| \leqq R$; elle atteint donc son maximum dans C en un point u_0, tel que $|u_0| \leqq R$. Et l'égalité $f_1(0) = c_n$ rapprochée de (1) exige $|u_0| < R$, ce qui est absurde, en raison des propriétés des fonctions harmoniques.

Si l'on ne veut pas invoquer cette dernière théorie, on remarquera que dans le voisinage de u_0, on peut écrire

$$f_1(u) = f_1(u_0) + k_p(u - u_0)^p \left[1 + \frac{k_{p+1}}{k_p}(u - u_0) + \ldots\right], \qquad (k_p \neq 0);$$

l'argument de $f_1(u) - f_1(u_0)$ diffère donc arbitrairement peu de celui de $k_p(u - u_0)^p$ dans le voisinage de u_0, et $|f_1(u)|$ ne peut être maximum en u_0.

NOTE II.

IMPOSSIBILITÉ DE L'EXISTENCE D'UNE FONCTION ANALYTIQUE AVEC DEUX PÉRIODES DONT LE RAPPORT EST RÉEL.

Soit $F(u)$ une fonction analytique d'une variable imaginaire avec deux périodes ω' et ω dont le rapport est réel

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{b}{a},$$

a et b étant réels. Si l'on fait

$$u = \frac{\omega}{a} z,$$

quand z augmente de a, u augmente de ω, et quand z augmente de b, u augmente de ω'. La fonction

$$f(z) = F\left(\frac{\omega}{a} z\right)$$

admet les deux *périodes réelles* a et b. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Ou bien les périodes a et b se réduisent à une; ou bien la fonction $f(z)$ est constante.

En effet, la fonction admettant les deux périodes a et b admet également toutes les périodes

$$Ma + Nb,$$

où M et N désignent deux entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls.

Considérons un axe Ox et construisons sur cet axe un segment OA égal à a. Si l'on prend, sur cet axe, un point d'abscisse x, on peut toujours choisir un entier m positif ou négatif de telle façon que le point

$$\xi = x + ma$$

soit à l'origine ou sur le segment OA : appelons ce point le *point homologue de x*. Alors considérons les points d'abscisses

$$b, \quad 2b, \quad 3b, \quad \ldots, \quad nb$$

et leurs homologues

$$x_1 = b + m_1 a, \qquad x_2 = 2b + m_2 a, \qquad \ldots, \qquad x_n = nb + m_n a,$$

tous situés sur OA. Toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et toutes leurs différences $x_\nu - x_\mu$ sont des périodes de $f(z)$, car elles sont toutes de la forme $Ma + Nb$, M et N étant des entiers.

Fig. 43.

Si tous les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distincts, il en est au moins deux x_ν et x_μ dont la distance est au plus égale à $\frac{a}{n-1}$, soit :

$$0 < x_\nu - x_\mu \leq \frac{a}{n-1};$$

en effet, si l'on divise le segment OA en $n-1$ parties égales, il existe nécessairement une de ces divisions qui contient au moins deux des points. La fonction admet alors la période

$$\omega_n = x_\nu - x_\mu, \qquad \omega_n \leq \frac{a}{n-1},$$

et l'on a

$$f(z + \omega_n) = f(z).$$

Faisons croître maintenant n indéfiniment. Deux cas sont à distinguer :

1° Quelque grand que soit n les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distincts : alors la fonction admet une période ω_n *différente* de zéro mais aussi petite que l'on veut, car elle est au plus égale à $\frac{a}{n-1}$. La fonction est une *constante :* en effet, on a

$$\frac{f(z+\omega_n) - f(z)}{\omega_n} = 0,$$

quels que soient z et n. Quand n augmente indéfiniment, ω_n tend vers zéro; $f(z)$ étant analytique, le rapport figurant dans le premier membre tend vers la dérivée $f'(z)$ et l'on trouve

$$f'(z) = 0, \qquad f(z) = \text{const.};$$

2° Il existe une valeur de n telle que deux des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient confondus :

$$x_\nu - x_\mu = 0.$$

On a alors

$$\nu b + m_\nu a = \mu b + m_\mu a,$$

relation de la forme

$$(1) \qquad pa + qb = 0,$$

p et q étant deux entiers que l'on peut toujours supposer premiers entre

eux, car on peut toujours, dans la relation (1), diviser les deux membres par les facteurs communs à p et q. Dans ce cas, les périodes a et b se réduisent à *une*. En effet, p et q étant premiers entre eux, il existe deux autres entiers p' et q' tels que

$$pq' - qp' = 1, \tag{2}$$

Désignons alors par c la quantité

$$p'a + q'b = c; \tag{3}$$

c est évidemment une période de $f(z)$; d'autre part, en résolvant les relations (1) et (3) par rapport à a et b, on a, d'après (2),

$$a = -qc, \qquad b = pc;$$

les périodes a et b sont donc des multiples d'une période unique c.

ADDITION A LA NOTE II.

IMPOSSIBILITÉ D'UNE FONCTION ANALYTIQUE AVEC TROIS PÉRIODES.

Imaginons une fonction analytique $f(z)$ d'une variable imaginaire z avec trois périodes α, β, γ dont les rapports sont imaginaires. Nous allons montrer ou que la fonction est *constante*, ou que les périodes se réduisent à *deux*.

Remarquons d'abord que la fonction admet comme périodes toutes les quantités

$$M\alpha + N\beta + P\gamma, \tag{1}$$

M, N, P étant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Construisons ensuite, dans le plan représentatif des imaginaires, le parallélogramme des périodes α et β, OABC, ayant pour sommets les points

$$0, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha + \beta.$$

Un point quelconque z du plan a, dans ce parallélogramme, un homologue ζ :

$$\zeta = z + l\alpha + m\beta,$$

l et m étant des entiers, convenablement choisis.

Considérons alors les n^2 points

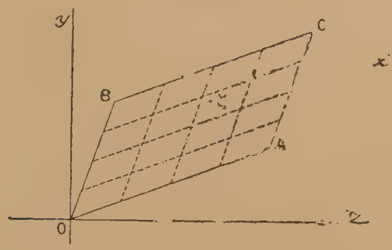
$$\gamma, \quad 2\gamma, \quad 3\gamma, \quad \ldots, \quad n^2\gamma,$$

où n est un entier, et leurs homologues

$$\begin{aligned}
z_1 &= \gamma + l_1\alpha + m_1\beta,\\
z_2 &= 2\gamma + l_2\alpha + m_2\beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{n^2} &= n^2\gamma + l_{n^2}\alpha + m_{n^2}\beta.
\end{aligned}$$

La fonction admet comme périodes toutes les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{n^2}$ et les différences de ces quantités deux à deux, car ces quantités et leurs différences sont de la forme (1).

Fig. 44.



Appelons λ la longueur de la plus grande diagonale du parallélogramme OABC. Si tous les points

$$(2) \qquad z_1, \; z_2, \; \ldots, \; z_{n^2}$$

sont distincts, il en est au moins deux z_ν et z_μ dont la distance est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. En effet, divisons les côtés OA et OB en $(n-1)$ parties égales et menons par les points de division des parallèles aux côtés du parallélogramme OABC : nous décomposerons ce parallélogramme en $(n-1)^2$ cases égales entre elles ayant pour grande diagonale $\frac{\lambda}{n-1}$; sur les n^2 points (2), il en est forcément deux, au moins, z_ν et z_μ, dans une de ces cases. Leur distance est alors moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. Analytiquement, le module de $z_\nu - z_\mu$ est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. La fonction admet donc la période

$$\omega_n = z_\nu - z_\mu,$$

dont le module est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$,

$$|\omega_n| < \frac{\lambda}{n-1}.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° Quelque grand que soit n, les points (2) sont toujours distincts. La fonction admet alors une période non nulle ω_n dont le module peut devenir aussi petit que l'on veut. Elle est constante, car, $f(z)$ étant analytique, l'égalité

$$\frac{f(z+\omega_n)-f(z)}{\omega_n} = 0$$

donne, pour n infini,

$$f'(z) = 0.$$

2° Pour une certaine valeur de n, deux des points (2), z_ν et z_μ coïncident. On a alors

$$\nu\gamma + l_\nu \alpha + m_\nu \beta = \mu\gamma + l_\mu \alpha + m_\mu \beta,$$

relation de la forme

$$(3) \qquad p\alpha + q\beta + r\gamma = 0,$$

p, q, r étant trois entiers qu'on peut toujours rendre premiers entre eux dans leur ensemble en divisant (3) par les facteurs communs à p, q, r. Les périodes se réduisent alors à *deux*.

En effet, appelons s le plus grand commun diviseur de p et q : on peut déterminer des entiers p' et q' tels que

$$(4) \qquad pq' - qp' = s.$$

Posons

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{p}{s}\alpha + \dfrac{q}{s}\beta = a, \\ p'\alpha + q'\beta = b; \end{cases}$$

a et b sont des périodes de la fonction, car $\frac{p}{s}$ et $\frac{q}{s}$ sont entiers. Les équations (5), résolues par rapport à α et β, donnent

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha = \quad q'a - \dfrac{q}{s} b, \\ \beta = -p'a + \dfrac{p}{s} b, \end{cases}$$

et la relation (3) devient

$$(7) \qquad sa + r\gamma = 0,$$

s et r étant des entiers premiers entre eux. On peut alors choisir deux entiers r' et s' tels que

$$rs' - sr' = 1$$

et en posant

$$(8) \qquad s'a + r'\gamma = c,$$

c est une période. On tire de (7) et (8)

$$a = rc, \qquad \gamma = -sc,$$

d'où enfin, d'après (6),

$$\begin{aligned} \alpha &= \quad q'rc - \frac{q}{s} b, \\ \beta &= -p'rc + \frac{p}{s} b, \\ \gamma &= -sc. \end{aligned}$$

Les trois périodes se réduisent donc aux deux b et c. Cette démonstration est empruntée à Riemann (*gesamm. Math. Werke*, 2e éd., 1892, p. 294; *Œuvres*, ..., trad. par L. Laugel, 1898, p. 300).

NOTE III.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS INFINIS DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Au début de l'Ouvrage, nous avons admis sans démonstration que les fonctions $\sin u$ et $\cot u$ peuvent être représentées par les développements infinis (8) et (9) (n° 15). Dans cette Note, nous établirons d'abord que les développements en question représentent bien ces deux fonctions.

La méthode que nous emploierons consiste à démontrer directement que le développement (9) satisfait à la même équation différentielle que la fonction $\cot u$. Pour obtenir ce résultat, nous nous appuierons sur la convergence absolue d'une série à double entrée, dont nous calculerons la somme de deux façons différentes; l'un des deux modes de calcul exige la sommation d'une série simple que nous effectuerons en utilisant la périodicité du développement (9).

Cette méthode, que nous croyons inédite, nous paraît être une des plus simples et des plus élémentaires qu'on puisse employer pour développer $\sin u$ en produit infini.

Dans une seconde partie de cette même Note, nous montrons que la même méthode s'applique à la fonction pu (cf. *Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. XXXVIII, 1914, p. 251). En d'autres termes, nous établirons directement que la série double qui définit cette fonction satisfait à l'équation

$$y'' = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

tandis que, dans l'Ouvrage (n° 31), nous aurons dû invoquer le théorème de Liouville (n° 7) pour établir ce résultat.

Dans un Mémoire fondamental à plus d'un titre (*Journal de Crelle*, t. 35), et antérieur aux travaux de Weierstrass, Eisenstein avait défini les fonctions circulaires et les fonctions elliptiques par des développements infinis qui en laissaient apparaître la périodicité; puis, il avait démontré directement que ces développements satisfont à des équations différentielles algébriques du premier ordre. Son analyse est toute différente de celle qui va suivre. D'ailleurs, ses calculs, qui font intervenir des relations différentielles du troisième ordre pour la fonction $\cot u$, et du cinquième, pour la fonction pu, sont d'une complication exagérée; de plus, au point de vue de la rigueur, son exposition est sujette à critiques.

Dans le même ordre d'idées, nous signalerons une belle démonstration d'Hermite (*Œuvres*, t. II, p. 221) qui établit directement que les développements en séries trigonométriques de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ satisfont aux équations

$$x' = yz, \qquad y' = -zx, \qquad z' = -k^2 xy.$$

I. — Développement de $\sin \pi u$ en produit infini.

Considérons la série

$$(1) \qquad y = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{u+n} \right) = \frac{1}{u} + 2u \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - n^2};$$

en la comparant à la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$, on voit aussitôt qu'elle est absolument convergente, et qu'elle est uniformément convergente dans tout domaine borné $\mathfrak{D}$ du plan (u). Elle définit une fonction impaire de u, $f(u)$ qui admet les pôles $u=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$, et qui possède évidemment la période 1.

La série étant absolument convergente, on peut en exprimer le carré sous la forme

$$(2) \qquad y^2 = \frac{1}{u^2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - n^2} + 4u^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(u^2 - n^2)^2}$$
$$+ 8u^2 \sum\nolimits_1 \frac{1}{(u^2 - m^2)(u^2 - n^2)},$$

où, dans Σ_1 les entiers m, n satisfont aux conditions

$$m > 0, \qquad n > 0, \qquad m > n.$$

De même, la série déduite de (1) par différentiation terme à terme étant uniformément convergente dans $\mathfrak{D}$, on peut écrire

$$(3) \qquad y' = -\frac{1}{u^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - n^2} - 4u^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(u^2 - n^2)^2},$$

et, par suite, on déduit de (2) et (3) la combinaison

$$(4) \qquad y' + y^2 = 6\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - n^2} + 8u^2 \sum\nolimits_1 \frac{1}{(u^2 - m^2)(u^2 - n^2)}.$$

Pour simplifier le second membre de (4), observons qu'on a

$$(5)\qquad \sum\nolimits_1 = \sum\nolimits_1 \left[\frac{1}{(m^2-n^2)(u^2-m^2)} + \frac{1}{(n^2-m^2)(u^2-n^2)}\right]$$
$$= \sum\nolimits_2 \frac{1}{(n^2-m^2)(u^2-n^2)},$$

où, dans Σ_2, m et n satisfont aux conditions

$$m > 0, \qquad n > 0, \qquad m \neq n.$$

Or la série double Σ_2 est absolument convergente ou non en même temps que celle de terme général $n^{-2}(m^2-n^2)^{-1}$; mais, pour m et $n > 0$, on a $|m^2-n^2| > (m-n)^2$, et, d'autre part, la série double de terme général $n^{-2}(m-n)^{-2}$ est évidemment convergente, ce qui entraîne la convergence absolue de Σ_2. Dès lors, on peut intervertir les termes dans Σ_2 et écrire

$$(6)\qquad \sum\nolimits_2 \frac{1}{(n^2-m^2)(u^2-n^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u^2-n^2} \sum_{\substack{m=1\\(m\neq n)}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2}.$$

Pour calculer $\sum \frac{1}{n^2-m^2}$ nous nous appuierons sur la périodicité de $f(u)$. Posons $u = n+\varepsilon$; il viendra

$$f(\varepsilon) = f(n+\varepsilon) = \frac{1}{n+\varepsilon} + \sum_{\substack{m=1\\(m\neq n)}}^{+\infty} \frac{2(n+\varepsilon)}{(n+\varepsilon)^2-m^2} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2n+\varepsilon},$$

d'où, puisque $f(\varepsilon)$ est impaire,

$$\sum_{\substack{m=1\\(m\neq n)}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2} = -\frac{3}{4n^2}.$$

L'application de ce résultat aux équations (6), (5) et (4) donne aussitôt

$$(7)\qquad y' + y^2 = -6\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Désignons le second membre de (7) par $-a^2$; on pourra écrire

$$y = a\cot(au+b);$$

mais y est impaire et n'admet pour pôles que les points $u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; on a donc $b = 0$ et $a = \pm\pi$, d'où

$$y = \pi\cot\pi u.$$

Il est aisé de déduire de ce résultat le développement de $\sin \pi u$ en produit infini. Car la série

$$(1') \qquad \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{n} \right) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

étant absolument convergente, on peut en former la somme en groupant les termes pour lesquels n prend deux valeurs opposées, et l'on retombe alors sur (1); mais cette dernière étant uniformément convergente dans tout domaine borné, on peut intégrer (1), ou (1'), terme à terme entre 0 et u, ce qui donne

$$\operatorname{Log} \frac{\sin \pi u}{\pi u} = \sum{}' \left[\operatorname{Log} \left(1 - \frac{u}{n} \right) + \frac{u}{n} \right] \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

d'où

$$\sin \pi u = \pi u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{n} \right) e^{\frac{u}{n}} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

à la notation près, c'est le développement (8) du n° 15.

II. — Formation de l'équation différentielle de la fonction pu.

Soient ω et ω' deux nombres dont le rapport est imaginaire; considérons toutes les quantités

$$a = 2m\omega + 2n\omega',$$
$$b = 2p\omega + 2q\omega',$$

où les entiers m, n, p, q vérifient les conditions

$$(8) \qquad n \geqq 0 \qquad (\text{et } m > 0, \text{ si } n = 0),$$
$$(9) \qquad q \geqq 0 \qquad (\text{et } p > 0, \text{ si } q = 0),$$
$$(10) \qquad m - p \neq 0 \quad \text{ou} \quad n - q \neq 0.$$

Soit u une quantité complexe n'appartenant pas à l'ensemble des nombres a (ou b). Pour ne pas interrompre la suite du raisonnement, nous allons démontrer d'abord la convergence absolue des séries à quadruple entrée dont les termes généraux sont

$$v(m, n, p, q) = \frac{3b^2 - a^2}{b^2(a^2 - b^2)^2(u^2 - a^2)^2},$$
$$w(m, n, p, q) = \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{a^2b^2(a^2 - b^2)^3(u^2 - a^2)}.$$

Or ces séries sont absolument convergentes ou non en même temps que

celles de termes généraux

$$v'(m, n, p, q) = \frac{3b^2 - a^2}{a^4 b^2 (a^2 - b^2)^2} = \frac{3}{a^4 b^2 (b^2 - a^2)} + \frac{2}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2},$$

$$w'(m, n, p, q) = \frac{3a^4 - 14a^2 b^2 + 3b^4}{a^4 b^2 (a^2 - b^2)^3} = \frac{3}{a^4 b^2 (a^2 - b^2)} - \frac{8}{a^2 (a^2 - b^2)^3}.$$

Mais il est aisé de voir que les séries de termes généraux

$$v''(m, n, p, q) = \frac{1}{a^4 b^2 (a^2 - b^2)},$$

$$w''(m, n, p, q) = \frac{1}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2},$$

$$w''_1(m, n, p, q) = \frac{1}{a^2 (a^2 - b^2)^3}$$

sont absolument convergentes. En effet, soit δ la plus petite des quantités $|2m\omega + 2n\omega'|$ où les entiers m et n varient de toutes les manières possibles (sans prendre en même temps la valeur 0); on a

$$|a^2 - b^2| > \delta |a| \qquad \text{et} \qquad |a^2 - b^2| > \delta |b|$$

(car l'une des quantités $|a - b|$, $|a + b|$ est supérieure à a, par exemple, et l'autre est au moins égale à δ). Il en résulte

$$|v''| < \frac{1}{\delta |a^4 b^3|}, \qquad |w''| < \frac{1}{\delta |a^3 b^3|},$$

ce qui assure la convergence absolue des deux premières séries (*cf.* Note IV). Pour la dernière, posons $b - a = c$, $b + a = d$; il viendra

$$|w''_1| = \frac{4}{|c^3 d^3 (d - c)^2|} < \frac{4}{\delta^2 |c^3 d^3|},$$

ce qui entraîne la même conclusion. Les séries à termes généraux v et w sont donc absolument convergentes, et, par suite, il en est de même de la série dont le terme général est

$$V(m, n, p, q) = \frac{2(3b^2 - a^2)}{b^2 (a^2 - b^2)^2 (u^2 - a^2)^2} + \frac{3a^4 - 14a^2 b^2 + 3b^4}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^3 (u^2 - a^2)}.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - a)^2} - \frac{1}{a^2} \right]$$

introduite au n° 21. Le rapport $\omega' : \omega$ n'étant pas réel, nous savons que la fonction précédente est méromorphe, et de périodes 2ω et $2\omega'$. Or, la série étant absolument convergente, ajoutons les termes pour lesquels a

prend deux valeurs opposées; il viendra

$$pu = \frac{1}{u^2} + 2\sum_1 \frac{u^2(3a^2 - u^2)}{a^2(u^2 - a^2)^2},$$

l'indice 1 signifiant que m et n doivent vérifier (8). On a évidemment le droit d'écrire

$$(11) \qquad \frac{1}{6}p''u = \frac{1}{u^4} + 2\sum_1 \frac{u^4 + 6a^2u^2 + a^4}{(u^2 - a^2)^4}$$

et

$$(12) \quad p^2 u = \frac{1}{u^4} + 4\sum_1 \frac{3a^2 - u^2}{a^2(u^2 - a^2)^2} + 4u^4 \sum_1 \frac{(3a^2 - u^2)^2}{a^4(u^2 - a^2)^4} + 8u^4\Delta,$$

en désignant par Δ la série quadruplement infinie

$$\Delta = \sum_2 \frac{(3a^2 - u^2)(3b^2 - u^2)}{a^2b^2(u^2 - a^2)^2(u^2 - b^2)^2},$$

l'indice 2 signifiant que m, n, p, q doivent satisfaire aux conditions (8), (9), (10), et que, de plus, si l'on a écrit le terme (m, n, p, q), on ne fera pas figurer le terme (p, q, m, n). Nous allons simplifier l'expression de Δ.

Or la série de terme général $V(m, n, p, q)$ étant absolument convergente, on peut en faire la somme en groupant les termes d'indices (m, n, p, q) et (p, q, m, n) : on obtient ainsi Δ; mais on peut encore évaluer la somme de la série en groupant tous les termes pour lesquels m et n sont constants, puis en faisant la somme des résultats. On trouve ainsi

$$\Delta = \sum_1 \frac{2}{(u^2 - a^2)^2} \sum_3 \frac{3b^2 - a^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}$$
$$+ \sum_1 \frac{1}{a^2(u^2 - a^2)} \sum_3 \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{b^2(a^2 - b^2)^3},$$

l'indice 3 signifiant que p et q doivent vérifier (9) et (10). Il s'agit donc de calculer

$$I = \sum_3 \frac{3b^2 - a^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}, \qquad J = \sum_3 \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{b^2(a^2 - b^2)^3}.$$

C'est ici qu'intervient la double périodicité de pu. Posons $u = a + \varepsilon$; il viendra

$$p\varepsilon = p(a + \varepsilon) = \frac{1}{(a + \varepsilon)^2} + 2\sum_3 \frac{(a + \varepsilon)^2[3b^2 - (a + \varepsilon)^2]}{b^2[(a + \varepsilon)^2 - b^2]^2}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(2a + \varepsilon)^2} - \frac{2}{a^2};$$

écrivons que le terme constant et le terme en ε sont nuls dans le développement suivant les puissances croissantes de ε; nous aurons

$$I = \frac{3}{8a^4} \qquad \text{et} \qquad K = \sum_3 \frac{a^2 + 3b^2}{(b^2 - a^2)^3} = \frac{9}{16a^4}.$$

Mais on a

$$J = 2K - 3I;$$

on trouve donc $J = 0$ et, par suite,

$$\Delta = \frac{3}{4}\sum_1 \frac{1}{a^4(u^2-a^2)^2}.$$

L'application de ce résultat à (12) donne, en vertu de (11),

$$p^2 u - \frac{1}{6}p'' u = \sum_1 \frac{4u^4 - 20a^2u^2 + 10a^4}{a^4(u^2-a^2)^2} + 8u^4\Delta = 10\sum_1 \frac{1}{a^4} = 5\sum{}' \frac{1}{a^4},$$

Σ' ayant la même signification qu'au n° 21. Posons, comme au n° 31,

$$\sum{}' \frac{1}{a^4} = \frac{g_2}{60},$$

il viendra

$$p'' u = 6p^2 u - \frac{g_2}{2}.$$

Dès lors, la fonction pu satisfait à une équation de la forme

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

et, en faisant $u = 0$, on trouve

$$g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{a^6}.$$

NOTE IV.

CONVERGENCE DU PRODUIT DOUBLEMENT INFINI QUI DÉFINIT σu.

Pour définir σu nous avons considéré le produit doublement infini

$$\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},\qquad \left\{\begin{array}{l} w = 2m\omega + 2n\omega', \\ \left.\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right\} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm\ldots,\ \pm\infty, \\ w = 0 \text{ exclu}, \end{array}\right.$$

et nous avons admis que ce produit est convergent. Pour le démontrer, nous établirons la convergence de la série obtenue en prenant les logarithmes des facteurs

$$\sum{}'\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right].$$

Si l'on choisit pour détermination du logarithme de $\left(1-\frac{w}{u}\right)$ celle qui tend vers zéro quand w devient infini, le terme général peut s'écrire, en développant le logarithme en série :

$$t_w = -\frac{u^3}{w^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{u}{w}+\frac{1}{5}\frac{u^2}{w^2}+\ldots\right)$$

et l'on voit que le rapport

$$t_w : -\frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3}$$

tend vers 1 quand $|w|$ devient infini. D'après cela il nous suffira de démontrer la convergence de la série

$$\sum{}' -\frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3} = -\frac{u^3}{3}\sum{}'\frac{1}{w^3}.$$

Plus généralement, nous établirons la proposition suivante :

La série

$$\sum{}'\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^s},\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right\} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \\ (m = 0,\ n = 0 \text{ exclu}) \end{array}\right.$$

est convergente si le rapport $\omega' : \omega$ est imaginaire et si s est un nombre réel supérieur à 2.

La démonstration suivante ne diffère pas sensiblement de celle d'Hermite (*Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, 3e édition p. 213; 4e édition, p. 259).

Posons

$$2\omega = \alpha + i\beta,$$
$$2\omega' = \alpha' + i\beta';$$

puisque $\omega' : \omega$ est imaginaire, $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ n'est pas nul; par suite la courbe représentée par l'équation

$$(1) \qquad |(2\omega x + 2\omega' y)^2| = 1,$$

ou, si l'on préfère, par l'équation

$$(\alpha x + \alpha' y)^2 + (\beta x + \beta' y)^2 = 1$$

est une ellipse véritable, non dégénérée en un système de deux droites parallèles. Désignons alors par A la longueur de son demi-grand axe; A est un nombre fini et pour toutes les valeurs de x et y qui représentent un point de la courbe, on peut écrire

$$x^2 + y^2 < A^2$$

ou bien, puisque x et y satisfont à (1),

$$x^2 + y^2 < A^2 |(2\omega x + 2\omega' y)^2|.$$

Cette relation étant homogène par rapport aux variables x et y subsiste si l'on y remplace x et y par λx et λy, λ étant une quantité quelconque; elle a donc lieu quelles que soient les valeurs de x et y. Nous la mettrons sous la forme

$$\frac{1}{|2\omega x + 2\omega' y|} < \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Une limite supérieure du module de la série considérée est donc $A \sum' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{s}{2}}}$ et il suffit de démontrer la convergence de cette série qui est d'une forme plus simple.

A cet effet, partageons le plan en carrés par des parallèles aux axes Oy et Ox dont les abscisses et les ordonnées représentent tous les nombres entiers. Les sommets de ces carrés, l'origine étant mise à part, ont ainsi pour coordonnées tous les nombres entiers et correspondent aux divers termes de la série

$$\sum' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Considérons d'abord la suite formée par la somme des termes corres-

pondant aux sommets situés sur la bissectrice Oz de l'angle des coordonnées xOy; pour ces points on a $m = n$: la somme envisagée est donc égale, à un facteur numérique près, à la série simple

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots;$$

elle est par suite convergente.

Prenons maintenant la somme des termes situés sur Ox et dans l'angle xOz; il suffira évidemment d'établir sa convergence pour démontrer notre proposition.

Soit, pour abréger l'écriture,

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{s}{2}}} = (m, n)$$

et posons

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1, 0),\\
u_2 &= (2, 0) + (2, 1),\\
u_3 &= (3, 0) + (3, 1) + (3, 2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_m &= (m, 0) + (m, 1) + \ldots + (m, m-1),
\end{aligned}$$

la série simple à laquelle nous sommes amenés, savoir

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots,$$

est manifestement convergente. En effet, chacun des m termes qui composent u_m est plus petit que le premier $(m, 0)$ qui est égal à $\frac{1}{m^s}$. On a donc

$$u_m < \frac{1}{m^{s-1}}.$$

Ainsi la série $\sum u_m$ est inférieure à $\sum \frac{1}{m^{s-1}}$ dont la valeur est finie.

La série proposée est donc convergente et a une somme indépendante de l'ordre de ses termes.

Pour appliquer le théorème précédent, prenons d'abord $s = 3$; nous en déduirons aussitôt la convergence absolue du produit infini qui définit σu; et, d'après la forme de t_w, on voit immédiatement que la convergence est uniforme à l'intérieur d'un domaine borné quelconque du plan u.

On démontrerait de même la convergence absolue et uniforme (dans tout domaine borné) des séries qui définissent ζu et pu, et, par suite, la légitimité des dérivations opérées sur σu et ζu (p. 25 et 26).

Prenons maintenant $s = 4$ et $s = 6$; soient $2\omega = 1$ et $2\omega' = \tau = x + iy$; les séries

$$\frac{g'_2}{60} = \sum{}' \frac{1}{(m + n\tau)^4} \quad \text{et} \quad \frac{g'_3}{140} = \sum{}' \frac{1}{(m + n\tau)^6}$$

seront absolument convergentes pour $y \neq 0$; elles convergeront uniformément pour

$$|x| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \varepsilon < y < \frac{1}{\varepsilon},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. On en déduit le résultat utilisé plus haut (n° **241**, p. 411).

NOTE V.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS Θ EN FACTEURS.

A la page 126, en identifiant l'expression de Θ_1 sous forme de produit avec l'expression de Θ_1 sous forme de série, nous avons obtenu l'identité

$$(1)\qquad \begin{aligned} &A(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots \\ &\quad = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+\ldots. \end{aligned}$$

Nous avons réservé à ce moment la détermination de la constante A. Voici la méthode que Biehler a donnée pour déterminer A, méthode que nous empruntons à une Note d'Hermite placée à la fin de la dernière édition de l'*Analyse* de Serret. Voir aussi *Œuvres*, t. II, p. 153-156.

Considérons le produit composé d'un nombre fini de facteurs,

$$\begin{aligned} f(z) &= (1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z) \\ &\quad\times\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right); \end{aligned}$$

le développement suivant les puissances positives et négatives de z sera de la forme

$$f(z) = A_0 + A_1\left(z+\frac{1}{z}\right)+\ldots+A_n\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right).$$

Cela étant, l'identité suivante, qui se vérifie immédiatement,

$$f(q^2z)(q^{2n}+qz) = f(z)(1+q^{2n+1}z),$$

donne entre deux coefficients consécutifs, A_j et A_{j-1}, la relation

$$A_j(1-q^{2n+2j}) = A_{j-1}(q^{2j-1}-q^{2n+1}).$$

Nous en tirons successivement

$$A_1 = A_0\frac{q(1-q^{2n})}{1-q^{2n+2}},$$

$$A_2 = A_1\frac{q^3(1-q^{2n-2})}{1-q^{2n+4}},$$

$$A_3 = A_2\frac{q^5(1-q^{2n-4})}{1-q^{2n+6}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par conséquent,

$$A_j = A_0 \frac{q^{j^2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^{2n-2j+2})}{(1-q^{2n+2})(1+q^{2n+4})\ldots(1-q^{2n+2j})}.$$

Tous les coefficients du développement s'obtiennent donc au moyen du premier A_0, dont voici la détermination.

Supposons $j=n$ et remarquons que dans $f(z)$ le terme en z^n ayant pour coefficient $q^{1+3+\ldots+(2n-1)}$, on a immédiatement $A_n = q^{n^2}$, d'où, par conséquent,

$$q^{n^2} = A_0 \frac{q^{n^2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^2)}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{4n})},$$

et, enfin, la valeur cherchée que nous écrirons ainsi

$$A_0 = \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}.$$

Cela étant, faisons croître indéfiniment le nombre n, cette expression nous donne

$$A_0 = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots},$$

et la relation entre A_j et A_0 devenant simplement $A_j = A_0 q^{j^2}$, on est conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\ldots\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\ldots \\ = \frac{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\ldots+q^{j^2}\left(z^j+\frac{1}{z^j}\right)+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de poser $z=e^{2ix}$ pour en conclure

$$\begin{aligned}(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots \\ = \frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.\end{aligned}$$

La valeur de la constante A qui figure dans la formule (1) est donc

$$A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots.$$

NOTE VI.

SUR LE PROBLÈME DE L'INVERSION.

Considérations générales. — 1. Soient ω et ω' deux nombres satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) \neq 0.$$

Nous avons vu au n° 32 que la fonction $z = p(u \mid \omega, \omega')$ vérifie la relation

$$(2) \qquad u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

où l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} g_2 = 60 \sum\sum' \dfrac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4} \equiv F_2(\omega, \omega'), \\ g_3 = 140 \sum\sum' \dfrac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6} \equiv F_3(\omega, \omega'); \end{cases}$$

ces quantités, g_2, g_3 satisfont d'ailleurs (n° 47) à l'inégalité

$$(4) \qquad g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0.$$

Enfin, lorsque u varie de 0 à $\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix}$ suivant un segment rectiligne par exemple, pu décrit dans son plan un arc de courbe $\begin{pmatrix}L\\ L'\end{pmatrix}$ ayant pour extrémités (n° 46) les points ∞ et $\begin{pmatrix}e_1\\ e_3\end{pmatrix}$, de sorte qu'on peut écrire

$$(5) \qquad 2\omega = 2\int_{L} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad 2\omega' = 2\int_{L'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Inversement, *proposons-nous de construire une fonction* pu *admettant pour invariants les quantités* g_2 *et* g_3 satisfaisant à (4). Les racines e_1, e_2, e_3 de $4z^3 - g_2 z - g_3$ sont alors distinctes, et l'on peut montrer que les quadratures (5), où L et L' sont deux chemins quelconques, reliant $z = \infty$ à $z = e_1$ et $z = e_3$, définissent deux quantités, ω et ω', satisfaisant à (1). Le symbole $p(u \mid \omega, \omega')$ a donc un sens, et, d'après ce qui précède, il est naturel d'*admettre* que cette fonction pu a précisément pour invariants g_2 et g_3. S'il en est ainsi, nous dirons (n° 34) que cette fonction

$p(u|\omega, \omega')$ constitue la solution du problème de l'inversion de l'intégrale elliptique (2), et nous la représenterons (n° 36) par le symbole $p(u; g_2, g_3)$.

Or, en fait, les résultats du Chapitre II que nous venons de rappeler *n'établissent nullement que la fonction $p(u|\omega, \omega')$ a effectivement g_2 et g_3 pour invariants :* tout ce qu'ils permettent d'affirmer, c'est que, si LA FONCTION $p(u|g_2, g_3)$ EXISTE, elle est donnée par la construction précédente.

2. Pour nous en rendre compte d'une manière plus précise, attribuons à ω et ω' l'ensemble de toutes les valeurs finies compatibles avec (1); les quantités $g_2 = g'_2 + i g''_2$, $g_3 = g'_3 + i g''_3$ se déplaceront à l'intérieur d'un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace $S(g'_2, g''_2, g'_3, g''_3)$. Nous savons que le continuum (4) fait partie de la frontière de $\mathfrak{D}$: mais, si l'on ne fait appel qu'aux résultats du Chapitre II, *rien ne prouve que ce continuum constitue à lui seul toute la frontière de* $\mathfrak{D}$. Admettons, par exemple, qu'il existe dans S un point $(\overline{g_2}, \overline{g_3})$ n'appartenant ni à $\mathfrak{D}$, ni à (4) [dans le langage du Chapitre XIII, ceci revient à admettre qu'une certaine équation

$$J(\tau) - \overline{a} = 0 \tag{6}$$

n'a pas de racine]; soient $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega'}$ les quantités définies par (5) (où g_2 et g_3 seraient remplacés par $\overline{g_2}$ et $\overline{g_3}$). En vertu de notre hypothèse sur $\overline{g_2}$ et $\overline{g_3}$, la fonction $p(u|\overline{\omega}, \overline{\omega'})$ aura pour invariants le couple

$$g_2^* = F_2(\overline{\omega_1}, \overline{\omega'}), \quad g_3^* = F_3(\overline{\omega_1}, \overline{\omega'})$$

distinct du couple $\overline{g_2}$, $\overline{g_3}$.

3. Quelque étranges que paraissent ses conséquences, l'hypothèse précédente ne doit pas, pourtant, être rejetée *a priori*. Supposons un instant que les fonctions $g_2(\omega, \omega')$, $g_3(\omega, \omega')$ résultant de l'inversion des relations (5) soient définies dans un certain domaine D de l'espace $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ [avec $\omega = \alpha + i\beta$, $\omega' = \alpha' + i\beta'$], et qu'elles soient *multiformes* dans D; partons d'un couple ω_0, ω'_0 satisfaisant à (1), et faisons varier ω, ω' dans D suivant une loi déterminée, depuis ω_0, ω'_0, jusqu'à $\overline{\omega}$, $\overline{\omega'}$; le couple g_2, g_3 variera depuis $g_2^0 = F_2(\omega_0, \omega'_0)$, $g_3^0 = F_3(\omega_0, \omega'_0)$ jusqu'à un couple de valeurs finales qui dépendra de la loi de variation adoptée. Parmi tous les couples possibles, il en existe un nécessairement qui vérifie les relations (3) (pour $\omega = \overline{\omega}$, $\omega' = \overline{\omega'}$) : c'est le couple g_2^*, g_3^*; les autres, tels que $\overline{g_2}$, $\overline{g_3}$, seront fournis par *d'autres branches* des fonctions multiformes $g_2(\omega, \omega')$, $g_3(\omega, \omega')$ et *ne vérifieront pas les relations* (3). Exclure *a priori* l'hypothèse du n° 2 équivaudrait donc à admettre l'uniformité des fonctions $g_2(\omega, \omega')$, $g_3(\omega, \omega')$ déduites de (5), uniformité qui est loin d'être évidente.

4. Jusqu'à présent, nous ne nous sommes servis que des relations (3) et (5), où ne figurent que les variables ω, ω', g_2, g_3; cherchons si l'on ne pourrait pas tourner la difficulté signalée plus haut en utilisant la relation (2). Une première voie s'offre aussitôt. La relation (2) définit l'intégrale de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 \tag{7}$$

satisfaisant à la condition

$$z(0) = \infty. \tag{8}$$

S'il était acquis que *l'intégrale générale de* (7) [ou que la fonction définie par le prolongement analytique de la série (42) (n° 33)] *est méromorphe en u*, on pourrait ajouter que cette intégrale, admettant pour périodes les quantités (5), est une fonction elliptique de u; et l'on en déduirait aussitôt que l'intégrale particulière répondant à (8) est une fonction $\mathrm{p}(u \mid g_2, g_3)$.

Or, pour $g_2 = g_2^0$, $g_3 = g_3^0$ (n° 3 de cette Note), l'intégrale générale de (9) est sûrement méromorphe; et l'on peut ajouter qu'il en est encore ainsi pour g_2 et g_3 suffisamment voisins de g_2^0 et g_3^0. Mais ceci n'est qu'un résultat local, et l'on voit réapparaître la difficulté signalée tout à l'heure (n^{os} 2 et 3) sous la forme suivante : *démontrer que pour* $g_2 = \overline{g}_2$, $g_3 = \overline{g}_3$ *l'intégrale de l'équation* (7) *est une fonction méromorphe de u*. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'on a ramené le problème de l'inversion à un problème de la théorie générale des équations différentielles.

5. Mais nous n'avons pas épuisé tout le parti qu'on peut tirer de la relation (2). Le rapport des périodes 2ω, $2\omega'$ de (2) satisfaisant à (1), on peut construire une fonction $\mathrm{p}(u \mid \omega, \omega')$; et, si l'on peut démontrer l'identité

$$\mathrm{p}\left(\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \,\Big|\, \omega, \omega'\right) = z, \tag{9}$$

on aura évidemment résolu le problème de l'inversion : car la différentiation de (9) montre aussitôt que $\mathrm{p}(u \mid \omega, \omega')$ admet g_2 et g_3 pour invariants.

Or, on peut établir sans peine que le premier membre de (9) est une fonction uniforme de z, dépourvue de singularité essentielle (finie ou non); c'est donc (n° 12, p. 12) une fonction rationnelle $R(z)$; et s'il était démontré que l'ordre de $R(z)$ est égal à 1, on en déduirait aussitôt l'égalité (9).

Mais ici se présente un nouvel obstacle : *rien ne prouve a priori que l'équation*

$$\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = 2m\omega + 2n\omega'$$

(m, n entiers) *n'ait pas d'autres racines que* $z = \infty$, e_1, e_2, e_3 : de sorte qu'il n'est nullement évident que $R(z)$ soit du premier ordre.

6. Indiquons maintenant les principaux résultats qui ont été obtenus dans les différentes directions que nous venons de signaler.

La discussion des équations (3) en ω et ω', ou, si l'on veut, la définition du domaine $\mathfrak{D}$ (n° 2) a été faite directement (c'est-à-dire sans recourir aux fonctions elliptiques) par Hurwitz, dans une courte Note, admirable de profondeur et de simplicité (*Math. Ann.*, t. 58, 1904, p. 343).

La méthode exposée dans l'Ouvrage (Chap. XIII, n° 260) s'appuie sur la résolubilité de l'équation (6); on peut donc la rattacher au point de vue précédent; mais on observera qu'elle exige l'intervention des fonctions elliptiques et des fonctions entières de Jacobi.

Dans le même ordre d'idées, on doit encore citer la belle démonstration de M. L. Bianchi, qui établit la résolubilité de (6) à l'aide de propositions générales de la théorie des fonctions (*Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellitiche*, n^{os} 120, 122.

A notre connaissance du moins, l'uniformité des fonctions inverses $g_2(\omega, \omega')$, $g_3(\omega, \omega')$ (n° 3) n'a pas encore été établie directement.

Passons à l'étude de l'équation différentielle (7). On peut montrer aisément la méromorphie de son intégrale générale en s'appuyant sur la relation algébrique qui constitue l'intégrale première de *l'équation d'Euler*

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} = \frac{dz'}{\sqrt{4z'^3-g_2z'-g_3}}.$$

Grâce à cette relation (qui constitue l'inversion de la formule d'addition de pu), on peut étendre de proche en proche le champ de convergence initial de l'intégrale et montrer qu'elle n'admet que des pôles pour singularité (*cf.* E. Goursat, *Cours d'Analyse*, 3e édition, t. II, p. 536).

Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, 2e édition, p. 347) ont cherché à établir que l'intégrale de (7) est méromorphe sans se servir de relations finies auxiliaires. Mais leur démonstration revient à établir que si les singularités de (7) sont algébriques, ce sont des pôles : elle laisse donc intacte la difficulté signalée plus haut (n° 4). L'obstacle a été surmonté par M. E. Picard (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. XIV, 1890, p. 107) par un procédé qui revient à établir dans ce cas particulier l'un des théorèmes généraux de M. Painlevé pour les équations du premier ordre (*Leçons... professées à Stockholm*, p. 57).

Enfin, c'est M. E. Goursat (*Cours d'Analyse*, 3e édition, t. II, p. 209) qui, le premier, a posé et résolu le problème de l'inversion par le procédé du n° 5. Pour établir que l'ordre de $R(z)$ est égal à 1, M. Goursat étudie la fonction $z(u)$, inverse de (2), à l'aide d'une méthode qui utilise, notamment, la théorie des fonctions implicites.

Dans une Note récente (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 3e série, t. X, 1918, p. 207) nous avons exposé une méthode synthétique et élémentaire qui détermine

directement l'ordre de $R(z)$ sans passer par l'étude préliminaire de la fonction inverse $z(u)$; cette méthode s'appuie uniquement sur les propriétés des séries de puissances et de la théorie des fonctions continues; quant à la théorie des fonctions elliptiques, elle n'intervient que par le développement en série double de pu.

Or, on peut modifier la démonstration précédente, de façon à ne supposer connues ni la propriété du rapport des périodes de (2), ni la rationalité de $R(z)$ (n° 5, p. 468); par contre, on doit faire intervenir les formules de la transformation de Landen.

7. C'est ce dernier point de vue que nous avons adopté dans la démonstration qui va suivre, comme étant plus conforme à la disposition générale de l'Ouvrage. Nous avons introduit les fonctions de Jacobi dont l'emploi, ici, était particulièrement simple; nous n'avons supposé connus que les propriétés des séries entières, la périodicité des intégrales elliptiques, les développements infinis du Chapitre IV et les formules de la transformation de Landen, qui, d'ailleurs, en sont la conséquence directe.

Dans une première partie, nous établissons, pour $|k|$ suffisamment petit, l'identité

$$\operatorname{sn}\left[\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,\middle|\,K, iK'\right] = z,$$

$4K$ et $2iK'$ étant des périodes fondamentales de l'intégrale; nous terminons (n° 15) en étendant le résultat au cas d'un module quelconque, et cela, grâce à la transformation de Landen, dont l'importance, signalée souvent par Hermite (cf. *Œuvres*, t. IV, p. 470) apparaît ici une fois de plus.

En définitive, l'analyse qui va suivre constitue une justification immédiate du postulat du n° 97; et, par une conséquence aisée, elle légitime le postulat du n° 34.

8. **Retour sur la transformation de Landen.** — Afin de ne pas interrompre le cours de la démonstration, nous présenterons d'abord quelques remarques complémentaires sur la transformation de Landen.

Reprenons les notations du Chapitre X; en vertu des relations (1) du n° 207, on peut écrire

$$(10)\qquad \frac{H\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\Theta\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \frac{H(u)}{\Theta(u)}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_1(u)}.$$

Or, désignons par K et iK' les demi-périodes, proportionnelles à ω et ω', et de multiplicateur 1, puis par K_1 et iK'_1 les demi-périodes, proportionnelles à $\frac{\omega}{2}$ et ω', et de multiplicateur 1. En vertu des n^{os} 94 et 208,

on aura

$$K = g\omega, \qquad iK' = g\omega',$$

$$K_1 = g(1+k')\frac{\omega}{2} = (1+k')\frac{K}{2}, \qquad K'_1 = -ig(1+k')\omega' = (1+k')K'$$

ou

$$K = (1+k_1)K_1, \qquad K' = (1+k_1)\frac{K'_1}{2},$$

et, en utilisant les définitions du n° 85, on pourra écrire (10) sous la forme

$$(10') \qquad \operatorname{sn}[(1+k')u \mid K_1, iK'_1] = (1+k')\frac{\operatorname{sn}(u \mid K, iK')\operatorname{cn}(u \mid K, iK')}{\operatorname{dn}(u \mid K, iK')}$$

ou

$$(10'') \qquad \operatorname{sn}\left[\frac{2u}{1+k_1}\middle| K_1, iK'_1\right] = \frac{2}{1+k_1}\frac{\operatorname{sn}(u \mid K, iK')\operatorname{cn}(u \mid K, iK')}{\operatorname{dn}(u \mid K, iK')}.$$

Posons alors

$$\operatorname{sn}^2(u \mid K, iK') = v, \qquad \operatorname{sn}^2[(1+k')u \mid K_1, iK'_1] = v_1;$$

l'équation (10') s'écrira

$$(11) \qquad v_1 = \frac{(1+k')^2 v(1-v)}{1-k^2 v};$$

et, d'ailleurs, en vertu de l'équation différentielle vérifiée par la fonction sn au multiplicateur 1 (nos 94 et 99), on a

$$(12) \qquad \frac{dv_1}{\sqrt{v_1(1-v_1)(1-k_1^2 v_1)}} = \frac{(1+k')\,dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2 v)}}.$$

A vrai dire, les relations précédentes ne sont établies que pour des valeurs de k $\left[\text{et de } k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}\right]$ qui peuvent être calculées à partir des périodes $2K$ et $2iK'$ par les formules du n° 85; et rien ne prouve que k puisse prendre une valeur quelconque (n° 2 de cette Note). Mais soit k_0 une valeur de k, calculée à partir de $2K_0$ et $2iK'_0$; (11) et (12) devront être vérifiées en même temps pour toutes les valeurs de k suffisamment voisines de k_0 : donc, quel que soit k, (11) entraîne (12) par différentiation et élimination, ce qu'un calcul direct vérifie aisément.

Le procédé par lequel nous avons obtenu le système (11)-(12) montre en outre qu'on peut faire varier u d'abord de 0 à $\frac{K}{2} = \frac{K_1}{1+k'}$ puis de $\frac{K}{2}$ à K, et cela suivant une loi telle que v_1 varie d'abord de 0 à 1 par valeurs réelles croissantes, puis de 1 à 0 par valeurs réelles décroissantes; et, en même temps, v décrira un arc de courbe $\mathcal{C}$, d'origine 0, d'extrémité 1, et passant par le point $(1+k')^{-1}$.

C'est ce que montrerait aussi une étude directe de la transformation (11) (cf. *loc. cit.*, au n° 6 de cette Note, n° 3 du Mémoire).

9. **Remarques sur l'itération de la transformation de Landen, pour k complexe.** — Cherchons l'effet que produit l'application indéfiniment répétée de la transformation de Landen sur le module k, supposé réel ou complexe (et différent de 0, 1, ∞).

D'après la formule (2) du n° 208, nous avons

$$k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Posons

$$\sqrt{k'} = r\,e^{i\theta}, \qquad \sqrt{k_1} = r_1\,e^{i\theta_1};$$

la formule précédente entraîne les relations

$$\tag{13} \operatorname{tang} 2\theta_1 = \frac{1-r^2}{1+r^2}\operatorname{tang}\theta,$$

$$\tag{14} \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} = \frac{1+r^2}{2r}\cos\theta.$$

Il y a une ambiguïté dans la définition de k'_1; nous la lèverons en convenant de choisir pour θ_1 *le plus petit en valeur absolue des deux angles satisfaisant à* (13) *dans le premier et le quatrième quadrant.* Nous aurons ainsi

$$|2\theta_1| < |\bar\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

$\bar\theta$ désignant l'angle du premier ou du quatrième quadrant ayant même tangente que θ.

On écrira de même, les indices ayant la même signification qu'au n° 210,

$$|\theta_2| < \frac{|\theta_1|}{2} < \frac{\pi}{2^2}, \quad \dots, \quad |\theta_n| < \frac{\pi}{2^n};$$

θ_n tend donc vers zéro. D'autre part, quand n augmente indéfiniment, r_n ne peut rester supérieur à $1+\varepsilon$ (ε, nombre positif fixe, arbitrairement petit) : car, s'il en était ainsi, l'équation (14) (où θ_n tend vers zéro) montrerait qu'il existe une certaine valeur n' de n telle que l'on ait à la fois

$$r_{n'} > 1+\varepsilon \qquad \text{et} \qquad r_{n'+1}^{-2} > 1 + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

d'où $r_{n'+1} < 1$. En particulier, il existe donc des points k'_n intérieurs à la boucle $|\theta| < \frac{\pi}{8}$ de la courbe $r^4 = 2\cos 4\theta$; le module correspondant, k_n, satisfait alors à $|k_n| < 1$, et, en vertu de la relation (2) du n° 208 et de l'inégalité $\mathcal{R}(k'_n) > 0$, on a

$$|k_{n+1}| = \left|\frac{k_n}{1+k'_n}\right|^2 \leq |k_n|^2$$

(l'égalité n'ayant lieu que si $k_n = 0$); on en déduit

$$|k_{n+p}| \leqq |k_n|^{2p},$$

ce qui prouve que, sous les conditions précisées plus haut pour le choix des radicaux, on a

$$\lim_{n=\infty} k_n = 0,$$

comme dans le cas où les k_n sont réels.

10. **La transformation** S. — A la transformation de Landen se rattache étroitement, comme on pourrait le montrer, la transformation quadratique T définie par la formule

$$(\mathrm{T}) \qquad w = \frac{\mathrm{W}^2 + 1}{2\mathrm{W}}.$$

Rappelons des propriétés bien connues de cette transformation. A tout point du plan (W), elle fait correspondre un point du plan (w); et à tout point w, deux points W_1, W_2, tels que $\mathrm{W}_1\mathrm{W}_2 = 1$. Posons

$$w = x + iy, \qquad \mathrm{W} = \rho e^{i\chi};$$

nous aurons

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\chi, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\chi,$$

d'où

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\right]^2} = 1;$$

et l'on voit que, quand W décrit dans son plan la circonférence $|\mathrm{W}| = \rho > 1$, w décrit une ellipse de foyers $w = \pm 1$; pour $\rho = 1$, cette ellipse se réduit au segment rectiligne $(-1, +1)$. Inversement, à tout point w de l'ellipse, correspondent deux points W_1 et W_2, d'arguments χ et $-\chi$ sur les cercles d'équations $|\mathrm{W}_1| = \rho$, $|\mathrm{W}_2| = \rho^{-1}$.

Posons maintenant, k désignant une quantité quelconque, de module $\mu < 1$,

$$z = kw, \qquad \mathrm{Z} = k\mathrm{W};$$

z et Z satisferont à la relation

$$(\mathrm{S}) \qquad z = \frac{\mathrm{Z}^2 + k^2}{2\mathrm{Z}},$$

qui définit une correspondance entre les plans (z) et (Z). En vertu des résultats précédents, l'aire $\mathcal{A}$ du plan (z), intérieure à l'ellipse E, de foyers $z = \pm k$, et passant par le point $z = 1$, sera représentée doublement sur la couronne $\mathcal{O}$ comprise entre les cercles C_1 et C_2 d'équations

$$|\mathrm{Z}| = \left|1 \pm \sqrt{1 - k^2}\right|.$$

Pour distinguer ces deux cercles l'un de l'autre, nous désignerons par k' la détermination du radical $\sqrt{1-k^2}$ qui se réduit à $+1$ pour $k=0$; $\mathcal{R}(k')$ ne peut s'annuler que pour $k^2 = 1 + l^2$ (l, réel). Donc, pour $|k| < 1$, $\mathcal{R}(k')$ garde le même signe, positif par hypothèse, et l'on aura

$$\left|\frac{1-k'}{1+k'}\right| < 1;$$

le cercle extérieur C_1 aura donc pour équation

$$|Z| = |1+k'|,$$

l'équation du cercle intérieur étant

$$|Z| = |1-k'|.$$

Cela étant, nous poserons provisoirement pour abréger l'écriture

$$P_0 = 1, \qquad P_p = \frac{Z^{2p} + k^{2p}}{2^p Z^p} \qquad (p > 0);$$

et nous démontrerons la proposition suivante :

11. **Lemme I.** — *Si z est intérieur à* E (frontière exclue), *on peut développer* $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ *en série convergente par la formule*

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2},\ 2p+1;\ k^2\right) P_{2p}.$$

Tout d'abord, on a immédiatement

$$z^{2n} = \left(\frac{Z^2+k^2}{2Z}\right)^{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{j!(2n-j)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2j} P_{2n-2j},$$

puis, pour

$$(16)\qquad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^n n!}\right]^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{k^{2j}}{2^{2j} j!(2n-j)!} P_{2n-2j}.$$

Posons

$$n = j + p \qquad (p \geqq 0)$$

et admettons qu'il soit permis d'intervertir les signes Σ; la formule précédente deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{P_{2p}}{2^{2p}} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{(2j+2p)!}{(j+p)!}\right]^2 \frac{k^{2j}}{2^{4j} j!(j+2p)!};$$

or, en introduisant (n° 113) le symbole $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ qui a un sens pour $|k|<1$, on voit aussitôt que cette dernière formule est identique à (15).

Mais il reste à établir la légitimité de l'interversion; à cet effet, considérons la série des puissances en ζ :

$$\psi(\zeta)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}F\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2},\ 2p+1:\ k^2\right)\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2p};$$

on peut écrire encore

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1\left[\frac{\zeta^2 u(1-u)}{1-k^2 u}\right]^p\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2 u)}}$$

comme on s'en assure en calculant le coefficient de k^{2j} dans le développement du terme de rang $p+1$ de la série précédente. Si l'intégrale précédente est prise le long du chemin $\mathfrak{C}$ défini à la fin du n° 8 de cette Note, et si ζ est intérieur à $\mathfrak{D}$ (frontière exclue), la quantité entre crochets restera, en module, inférieure à 1; la série $\psi(\zeta)$ sera donc régulièrement convergente à l'intérieur de tout cercle de centre O et de rayon inférieur à $|1+k'|$. Un raisonnement analogue s'applique à la série qu'on déduit de $\psi(\zeta)$ en y remplaçant ζ par $k^2:\zeta$, de sorte qu'en définitive la série qui figure au second membre de (15) représente une fonction $\mathfrak{F}(Z)$ holomorphe à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. Montrons que cette fonction est identique à $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Or les coefficients de la série (15), envisagée comme une série double par rapport aux puissances de Z et k, sont des nombres positifs; d'autre part, le raisonnement même qui précède, montre que cette série est convergente quand on y remplace k par $|k|\equiv\mu$ et Z par $|Z|$ pourvu que $|Z|$ appartienne à la couronne

$$(\mathfrak{D}') \qquad |Z|<1+\sqrt{1-\mu^2}, \qquad \left|\frac{k^2}{Z}\right|<1+\sqrt{1-\mu^2}$$

intérieure à $\mathfrak{D}$. De plus, les points de $\mathfrak{D}'$ satisfont à (16) : car en vertu des notations du n° 10 de cette Note, (16) peut s'écrire

$$f(\rho)\equiv\rho^2+2\cos 2\chi+\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\mu^2}<0,$$

et l'on a $f\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)=0$ quel que soit χ. On peut donc dire, d'abord, que l'interversion des signes Σ est légitime dans $\mathfrak{D}'$, et en outre que la fonction holomorphe $\mathfrak{F}(Z)$ coïncide avec $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ dans $\mathfrak{D}'$, et, par suite, à l'intérieur de $\mathfrak{D}$.

Notre proposition est donc établie. Introduisons maintenant l'intégrale

$$\mathrm{I}(z) \equiv \int_k^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}},$$

la détermination initiale du radical étant arbitraire, et le chemin d'intégration étant intérieur à E; les périodes de $\mathrm{I}(z)$ s'écriront

$$4\mathrm{K} = 4\int_0^k \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}}$$

(le radical étant pris égal à 1 pour $z=0$), et

$$2i\mathrm{K}' = 2\int_k^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}},$$

formule où l'ambiguïté du signe sera bientôt levée. Démontrons alors le lemme suivant :

12. **Lemme II**. — *Si z est intérieur à* E (frontière exclue), *on peut développer* $\mathrm{I}(z)$ *en série convergente par la formule*

$$(17)\quad \mathrm{I}(z) = i\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)\operatorname{Log}\frac{\mathrm{Z}}{k} + i\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2p}\,\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots2p}\,\mathrm{F}\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; k^2\right) \times \frac{\mathrm{Z}^{4p}-k^{4p}}{(2\mathrm{Z})^{2p}};$$

et l'on a, en outre,

$$(18)\quad \mathrm{K}' = \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)\operatorname{Log}\frac{1+k'}{k} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2p}\,\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots2p}\,\mathrm{F}\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; k^2\right) \times \left[\left(\frac{1+k'}{2}\right)^{2p} - \left(\frac{1-k'}{2}\right)^{2p}\right].$$

A l'intérieur de $\mathfrak{D}$, l'expression $\sqrt{z^2-k^2} = \dfrac{\mathrm{Z}^2-k^2}{2\mathrm{Z}}$ est uniforme; elle prend d'ailleurs aux deux points Z et $k^2:\mathrm{Z}$ qui correspond à z en vertu de (S) les deux déterminations opposées qui répondent à z; mais, pour notre problème, il n'y a pas lieu de préciser la détermination du radical,

ni le choix du point Z; nous écrirons ainsi

$$\frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} = i\frac{dZ}{Z},$$

et, en revenant à (15), on en déduit aussitôt (17), par intégration entre les limites k et Z. D'après le numéro précédent, la légitimité de l'intégration n'est d'ailleurs assurée que pour les points Z de ω (frontières exclues). En particulier, nous pouvons prendre $Z = -k$, ce qui nous donnera

$$\text{(19)} \qquad K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)$$

(*cf.* n° 113), mais nous ne sommes pas sûrs encore de pouvoir prendre $Z = 1 + k'$ (c'est-à-dire $z = 1$) afin d'obtenir la formule (18).

Pour établir cette formule, appliquons le théorème d'Abel à la série de puissances

$$\varphi(\zeta) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p}\,\frac{1.3\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p} F\left(p + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}, 2p+1; k^2\right)\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2p};$$

d'après ce théorème, si cette série converge pour $\zeta = 1 + k'$, le second membre de (18) représentera bien $K' = \frac{1}{i} I(1)$.

Or, en procédant comme au numéro précédent, on peut écrire le terme général de (18) sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{v^p}{p}\,\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2 u)}},$$

avec

$$v = \frac{(1+k')^2 u(1-u)}{1 - k^2 u},$$

et l'intégrale étant toujours prise le long de $\mathfrak{C}$. Considérons alors l'expression

$$A = \sum_{p=1}^{q} \int_{u_1}^{\frac{1}{1+k'}} \frac{v^p}{p}\,\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2 u)}},$$

où u_1 est un point de $\mathfrak{C}$ arbitrairement voisin de $(1+k')^{-1}$ (soit sur l'arc $\overset{\frown}{0(1+k')^{-1}}$, soit sur l'arc $\overset{\frown}{(1+k')^{-1}\,1}$). On peut encore écrire [formules (11) et (12) du n° 8]

$$A = \frac{1}{1+k'}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left(\frac{v}{1} + \ldots + \frac{v^q}{q}\right)\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k_1^2 v)}},$$

ε étant arbitrairement petit. Mais, quel que soit q, on aura

$$|A| < \frac{1}{|1+k'|}\int_{1-\varepsilon}^{1} \log\frac{1}{1-v}\,\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)\,|1-k_1^2 v|}},$$

le second membre pouvant être rendu aussi petit qu'on voudra. Les intégrales

$$\int_{u_0}^{\frac{1}{1+k'}} \sum_{p=1}^{q} \frac{v^p}{p}\,\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2 u)}} \qquad (u_0 = 0 \text{ ou } 1)$$

sont donc uniformément convergentes, si grand que soit l'entier q. Dès lors, on peut affirmer que la série $\varphi(1+k')$ a pour somme l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log\frac{1}{1-v}\,\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2 u)}},$$

dont la valeur est une fonction bornée (et continue) de k à l'intérieur d'un cercle de rayon inférieur à 1.

13. **Lemme III.** — *On peut déterminer deux nombres positifs*, $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, *tels que pour*

(20) $$|k| < \frac{\beta}{\alpha}:$$

1° *Le symbole* $\operatorname{sn}(u \mid K, iK')$ *a un sens;*

2° *La fonction*

$$R(z) \equiv \frac{1}{\operatorname{sn}[I(z)+K+iK' \mid K, iK'] - 1}$$

est holomorphe dans le cercle

(Γ) $$|z| < \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\,\beta.$$

Posons $\Phi(\zeta) = \dfrac{2\varphi(\zeta)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1;\, k^2\right)}$; en vertu de (17), (18), (19) on peut écrire

(21) $$\frac{\pi I(z)}{iK} = 2\,\mathrm{Log}\frac{Z}{k} + \Phi(Z) - \Phi\left(\frac{k^2}{Z}\right),$$

(22) $$\frac{\pi K'}{K} = 2\,\mathrm{Log}\frac{1+k'}{k} + \Phi(1+k') - \Phi(1-k').$$

Or, lorsque $\mu = |k|$ tend vers zéro, $\Phi(1+k') - \Phi(1-k')$ tend vers une limite finie positive, soit $\dfrac{M}{2}$ (qu'on démontrera être égale à $\log 4$); on peut

donc déterminer un nombre positif μ_1 (inférieur à 1), tel que pour $\mu < \mu_1$ on ait

$$|\Phi(1+k') - \Phi(1-k')| < \mathrm{M};$$

et, pour $\mu < \mu_1$, on pourra écrire

$$(23) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right) > 2\log\left|\frac{1+k'}{k}\right| - \mathrm{M} > 2\log\frac{1}{\mu} - \mathrm{M}.$$

Ceci fait, déterminons un nombre positif β, inférieur à $e^{-2\mathrm{M}}(<1)$ et tel que pour $|\zeta| < \beta$, et $\mu < \mu_1$ on ait $|\Phi(\zeta)| < \frac{\mathrm{M}}{2}$; puis, choisissons un nombre positif α supérieur au plus grand des nombres $e^{\frac{\mathrm{M}}{2}}$ et $\beta : \mu_1$; si la condition (20) est vérifiée, on aura donc sûrement $\mu < \mu_1$. Décrivons enfin dans le plan (Z) les cercles γ_1 et γ_2, de centre O, de rayons β et

$$\frac{\mu^2}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha^2} < \beta:$$

γ_2 sera intérieur à γ_1 et la couronne $\mathcal{D}''$ qu'ils délimitent appartiendra à $\mathcal{D}$ (car on a $\beta < 1 + \sqrt{1-\mu^2}$). Or Z variant à l'intérieur de $\mathcal{D}''$, $|\Phi(\mathrm{Z})|$ et $\left|\Phi\left(\frac{k^2}{\mathrm{Z}}\right)\right|$ seront inférieurs à $\frac{\mathrm{M}}{2}$; de plus, $\log\left|\frac{\mathrm{Z}}{k}\right|$ sera, en valeur absolue, inférieur à $\log\frac{\beta}{\mu}$; enfin, z variera à l'intérieur d'une ellipse de foyers $z = \pm k$ et de demi-petit axe égal à $\frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\mu^2}{\beta}\right) > \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}\beta$; quelque petit que soit $|k| = \mu$, celle ellipse contiendra toujours à son intérieur le cercle Γ (de rayon inférieur à 1).

Cela étant, faisons varier z à l'intérieur de Γ; si la condition (20) est vérifiée, on aura, quelque petit que soit μ,

$$\left|\mathcal{R}\left[\frac{\pi \mathrm{I}(z)}{i\mathrm{K}}\right]\right| < 2\log\frac{\beta}{\mu} + \mathrm{M}$$

(où le second membre est sûrement positif): et, par comparaison avec (23), il viendra

$$(24) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right) - \left|\mathcal{R}\left[\frac{\pi \mathrm{I}(z)}{i\mathrm{K}}\right]\right| > 2\log\frac{1}{\beta} - 2\mathrm{M} > 2\mathrm{M}.$$

On en déduit d'abord que, pour $\mu < \frac{\beta}{\alpha}$, $\mathcal{R}\left(\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right)$ est positif, ce qui démontre la première partie de notre lemme. Traçons maintenant à partir de l'origine le réseau des parallélogrammes des périodes de la fonction $\mathrm{sn}(u \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}')$ et soit $2\mathrm{D}$ la distance du sommet $2i\mathrm{K}'$ au côté $(0, 4\mathrm{K})$; d'après (24), on aura $\mathrm{D} > \frac{2\mathrm{M}\,|\,\mathrm{K}\,|}{\pi}$. Figurons alors les droites Δ', Δ'', parallèles

au côté $(0, 4K)$ et situées à une distance $D - \frac{2M|K|}{\pi}$ de ce côté ; la bande $\mathcal{B}$ limitée par Δ' et Δ'' ne contiendra aucun point équivalent à iK'. Cela étant, la condition (24) signifie évidemment que (20) étant vérifiée, et z variant dans Γ, $I(z)$ ne peut sortir de $\mathcal{B}$: dans les mêmes conditions, le point $I(z) + iK'$ ne saurait coïncider avec aucun sommet du réseau.

Or l'ensemble de toutes les déterminations que peut acquérir $I(z)$ quand on modifie de toutes les manières possibles le chemin d'intégration est de la forme

$$\pm \bar{I}(z) + 4mK + 2niK' \qquad (m, n, \text{ entiers});$$

la fonction $\operatorname{sn}(u + K + iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u}$ étant paire, et admettant les périodes $4K$ et $2iK'$, $R(z)$ est uniforme dans tout le plan z; de plus, à l'intérieur de Γ, et sous réserve de (20), $\bar{I}(z)$ est borné, et $\operatorname{sn}[I(z) + K + iK'] - 1$ ne peut être nul, d'après ce qu'on vient de démontrer. La fonction $R(z)$ est donc bien holomorphe à l'intérieur de Γ.

14. Solution du problème de l'inversion pour $|k|$ suffisamment petit. — Considérons l'intégrale

$$I_1(z) = I(z) + iK' = \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}},$$

où, d'après ce qui précède, la détermination du radical et le choix du chemin d'intégration n'ont pas besoin d'être précisés pour le calcul de $R(z)$. Comme $I_1(z)$ ne peut devenir infini extérieurement à Γ, les seuls points où $R(z)$ puisse cesser d'être holomorphe sont ceux où $I_1(z)$ est égal à $4mK + 2niK'$; en particulier, il en est ainsi de $z = 1$. Mais, lorsque k tend vers zéro, K tend vers $\frac{\pi}{2}$ (nº 12 de cette Note), et $\mathcal{R}(K' : K)$ croît indéfiniment, de sorte que $|4mK + 2niK'|$ finit par rester supérieur à tout nombre positif $< 2\pi$; de $z = 1$ comme centre, on peut donc décrire un cercle Γ' de rayon assez petit pour qu'à l'intérieur de Γ' $R(z)$ ne possède qu'un seul pôle, $z = 1$, et cela dès que $|k|$ est suffisamment petit.

Il nous reste à étudier $R(z)$ extérieurement à Γ et Γ'. Or, si k tend vers zéro, $I_1(z)$ est une fonction continue de k à l'extérieur de Γ $\left(\text{et qui tend vers } \arccos\frac{1}{z}\right)$. Dans ces conditions, les expressions $\sin\frac{\pi(I_1+K)}{2K}$ et $\cos\frac{\pi(I_1+K)}{K}$ restent bornées $\left(\text{et tendent respectivement vers } \frac{1}{z} \text{ et } 1 - \frac{2}{z^2}\right)$; mais, d'après (24), $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ tend alors vers zéro, de sorte que

la fonction

$$\operatorname{sn} u = \sin\frac{\pi u}{2K}\,\frac{(1+q)^2(1+q^3)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2\ldots}\,\frac{\left(1-2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4\right)\ldots}{\left(1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)\ldots},$$

où u désigne $I_1(z)+K$, reste constamment bornée à l'extérieur de Γ (et tend vers $1:z$). En définitive, pour $|k|$ suffisamment petit, $R(z)$ est holomorphe dans tout le plan (z) à l'exclusion du pôle $z=1$.

Étudions la fonction autour de ce point. On a (n° 96)

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(I_1-K)-1} = \frac{\operatorname{dn} I_1}{\operatorname{cn} I_1-\operatorname{dn} I_1} = \frac{1-\frac{k^2}{2}I_1^2+\ldots}{-\frac{k'^2}{2}I_1^2+\frac{k'^2(1-k^2)}{24}I_1^4};$$

or

$$I_1^2(z) = \frac{2}{k'^2}(z-1)-\frac{1}{3}\,\frac{6-(k^2+1)}{k'^4}(z-1)^2+\ldots,$$

d'où

$$R(z) = -\frac{1}{z-1}-1+\ldots,$$

les termes non écrits représentant une fonction holomorphe et nulle pour $z=1$. Pour $|k|$ assez petit, l'expression $R(z)+\dfrac{z}{z-1}$ est donc uniforme et bornée quel que soit z; c'est donc une constante (n° 7), qui ne peut être que 0, puisque la somme précédente s'annule pour $z=1$, Pour $|k|$ assez petit, nous avons donc établi la formule

$$\frac{1}{\operatorname{sn}[I_1(z)+K]-1} = \frac{z}{1-z},$$

qu'on aurait pu déduire aussi du calcul antérieur de la limite de $\operatorname{sn} u$ (extérieurement à Γ et Γ'). On tire de là (n° 86)

$$(25)\qquad \operatorname{sn}[I_1(z)+K+iK'] = \frac{z}{k}.$$

Or, moyennant le changement de z en $k\zeta$ sous le signe d'intégration, on peut écrire

$$K+iK'+I_1(z) = \int_0^{\frac{1}{k}}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}+\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{z}{k}}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

et, si dans (25) on remplace z par $k\zeta$, on peut dire que, pour $|k|$ suffisamment petit, la fonction $\operatorname{sn} u$, construite avec les périodes $4K$ et $2iK'$ de l'in-

tégrale elliptique précédente vérifie l'identité

$$\operatorname{sn}\left[\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\right] = \zeta.$$

Pour $|k|$ suffisamment petit, le problème de l'inversion est donc résolu.

15. Extension au cas d'un module quelconque ($\neq 0, \pm 1, \infty$). — Montrons maintenant que le résultat obtenu s'étend au cas d'un module k quelconque. A cet effet, écrivons la suite des modules $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ qui se déduisent de $k(\neq 0, \pm 1, \infty)$ par l'application réitérée de la transformation de Landen. Actuellement, nous ne savons pas encore s'il existe des fonctions $\operatorname{sn} u$ admettant pour module l'un quelconque des modules précédents; mais nous avons vu (n° 9) que, moyennant des conventions déterminées sur les radicaux $\sqrt{k'_n}$, la suite précédente tend vers zéro. Pour l'un de ces modules, soit k_1, le problème de l'inversion est donc sûrement possible; supposons que nous ne sachions rien du cas de la valeur antécédente, k; tout reviendra à établir la possibilité de l'inversion pour ce cas.

Or, construisons une fonction sn aux périodes

$$4K_1 = 4\int_0^1 \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k_1^2 z_1^2)}}, \qquad 2iK'_1 = 2\int_1^{\frac{1}{k_1}} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k_1^2 z_1^2)}};$$

on pourra former également une fonction sn, aux périodes

$$4K = 4(1+k_1)K_1, \qquad 2iK' = 2i(1+k_1)\frac{K'_1}{2},$$

et ces fonctions vérifieront la relation (10″). Enfin, les variables $z=\sqrt{v}$ et $z_1=\sqrt{v_1}$ (p. 471) étant liées par la relation

$$z_1 = \frac{2}{1+k_1}\,\frac{z\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2 z^2}}, \tag{26}$$

on peut écrire

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \frac{1+k_1}{2}\,\frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k_1^2 z_1^2)}}, \tag{27}$$

les radicaux étant pris égaux à 1 pour $z = 0 = z_1$.

Ceci posé, le problème de l'inversion étant supposé résolu pour la valeur k_1 du module, il existe un nombre u tel qu'on ait simultanément

$$\frac{2u}{1+k_1} = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k_1^2 z_1^2)}} \tag{28}$$

et

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2u}{1+k_1}\middle| K_1, iK'_1\right) = z_1; \tag{29}$$

en vertu de (27) et (28), on pourra donc écrire

$$u = \int^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{30}$$

tandis que, d'après (10″), (29) et (26), on aura

$$\frac{\operatorname{sn}(u\,|\,K, iK')\operatorname{cn}(u\,|\,K, iK')}{\operatorname{dn}(u\,|\,K, iK')} = \frac{z\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}}. \tag{31}$$

Déterminons une quantité a par la relation $\operatorname{sn}(a\,|\,K, iK) = z$; (31) donnera

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \pm \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}.$$

Or le premier membre est une fonction elliptique aux périodes $2K$, $2iK'$, aux zéros (non homologues) o et K; on aura donc soit $u = \pm a$, soit $u = K \mp a$, à des multiples près de $2K$ et $2iK'$. Mais u doit s'annuler avec a, ce qui exclut le second cas; et comme $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ est égal à 1 pour $z = 0$, on aura soit $u = a$, soit $u = 2K - a$ (à des multiples près de $4K$ et $2iK'$). Moyennant un choix convenable du chemin d'intégration, on peut se borner à la première formule. Il résulte de là que la fonction $\operatorname{sn} u$, construite avec les périodes de l'intégrale (30), est bien telle que l'on ait identiquement $\operatorname{sn} u = z$.

Le problème de l'inversion est ainsi résolu pour une valeur quelconque du module.

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES.

FONCTIONS DE WEIERSTRASS.

Développements en produits et séries infinis.

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right),$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

$$(w = 2m\omega + 2n\omega'),$$

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$-\frac{1}{2}\wp' u = \sum \frac{1}{(u - w)^3}.$$

Développements en séries entières.

$$\sigma u = u + \star - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} - \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{g_2}{2^2.3.5} u^3 - \frac{g_3}{2^2.5.7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7} u^7 - \ldots,$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{2^2.5} u^2 + \frac{g_3}{2^2.7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2} u^6 + \ldots,$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$

Relations entre pu et ses dérivées.

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3 = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$
$$p'' u = 6p^2 u - \tfrac{1}{2} g_2,$$
$$p''' u = 12\, pu\, p'u.$$

Homogénéité.

$$\sigma(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \mu\sigma(u \mid \omega, \omega'),$$
$$\zeta(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu}\zeta(u \mid \omega, \omega'),$$
$$p(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^2} p(u \mid \omega, \omega'),$$
$$g_2(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^4} g_2(\omega, \omega'),$$
$$g_3(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^6} g_3(\omega, \omega').$$

Dégénérescence.

1° $\omega' = \infty$:

$$pu = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi u}{2\omega}\right)},$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9 g_3}{2 g_2}, \qquad e_1 = \frac{3 g_3}{g_2}, \qquad e_2 = e_3 = -\frac{3 g_3}{2 g_2},$$

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0,$$

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u,$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}.$$

2° $\omega = \infty$, $\omega' = \infty$:

$$pu = \frac{1}{u^2}, \qquad \zeta u = \frac{1}{u}, \qquad \sigma u = u,$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = 0.$$

Périodicité et formules d'addition.

$$p(u + 2\omega) = pu,$$
$$p(u + 2\omega') = pu,$$
$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta, \qquad \eta = \zeta\omega,$$
$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta u + 2\eta', \qquad \eta' = \zeta\omega',$$

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u,$$
$$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$
$$\sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\, e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u;$$

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v},$$
$$\frac{p'u}{pu-pv} = \zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta u,$$
$$\frac{-p'v}{pu-pv} = \zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta v,$$
$$\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv} = \zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v,$$
$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right),$$
$$pu+pv+p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2,$$
$$p(u+\omega)-e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pu-e_1},$$
$$p(u+\omega+\omega')-e_2 = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{pu-e_2},$$
$$p(u+\omega')-e_3 = \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{pu-e_3}.$$

Racines e_1, e_2, e_3. — *Fonctions* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega+\omega'), \qquad e_3 = p\omega',$$
$$p'u = -2\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')\sigma^3 u},$$
$$\sigma_1 u = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega},$$
$$\sigma_2 u = e^{(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')},$$
$$\sigma_3 u = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'};$$
$$pu-e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad pu-e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad pu-e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2;$$
$$p'u = -\frac{2\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

Les fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont paires.

Valeurs réelles de pu quand ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réelles.

Considérons le rectangle de sommets 0, ω, $\omega+\omega'$, ω'. Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens 0, ω, $\omega+\omega'$, ω', 0, la fonction pu est réelle et diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1° Quand u va de 0 au sommet ω, pu décroît de ∞ à e_1; $p'u$ est réelle et négative.

2° Quand u va de ω à $\omega+\omega'$, pu décroît de e_1 à e_2, $p'u$ est purement imaginaire positive.

3° La variable u allant de $\omega+\omega'$ à ω', pu décroît de e_2 à e_3, $p'u$ est réelle et positive.

4° Enfin u revenant de ω' à 0, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle, pu est imaginaire.

FONCTIONS DE JACOBI.

Séries trigonométriques.

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad v = \frac{\pi u}{2K},$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin v - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5v - \ldots,$$

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos v + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5v + \ldots,$$

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + \ldots,$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v + 2q^9\cos 6v + \ldots.$$

$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}$,	*Zéros de* $H(u)$	$2mK + 2niK'$,
$H_1(u) = H(u+K)$,	» $H_1(u)$	$(2m+1)K + 2niK'$,
$\Theta(u) = \frac{1}{i\lambda}H(u+iK')$,	» $\Theta(u)$	$2mK + (2n+1)iK'$,
$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda}H(u+K+iK')$,	» $\Theta_1(u)$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$.

Produits infinis.

$$v = \frac{\pi u}{2K}, \qquad A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

$$H(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\,\sin v(1 - 2q^2\cos 2v + q^4)(1 - 2q^4\cos 2v + q^8)\ldots;$$

$$H_1(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\,\cos v(1 + 2q^2\cos 2v + q^4)(1 + 2q^4\cos 2v + q^8)\ldots,$$

$$\Theta(u) = A(1 - 2q\cos 2v + q^2)(1 - 2q^3\cos 2v + q^6)\ldots,$$

$$\Theta_1(u) = A(1 + 2q\cos 2v + q^2)(1 + 2q^3\cos 2v + q^6)\ldots.$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \qquad \mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

$$\begin{aligned}
H(u+K) &= H_1(u), & H(u+iK') &= i\lambda\,\Theta(u),\\
\Theta(u+K) &= \Theta_1(u), & \Theta(u+iK') &= i\lambda H(u),\\
H_1(u+K) &= -H(u), & H_1(u+iK') &= \lambda\Theta_1(u),\\
\Theta_1(u+K) &= \Theta(u), & \Theta_1(u+iK') &= \lambda H_1(u),\\
H(u+K+iK') &= \lambda\Theta_1(u), & H(u+2iK') &= -\mu H(u),\\
\Theta(u+K+iK') &= \lambda H_1(u), & \Theta(u+2iK') &= -\mu\Theta(u),\\
H_1(u+K+iK') &= -i\lambda\,\Theta(u), & H_1(u+2iK') &= \mu H_1(u),\\
\Theta_1(u+K+iK') &= i\lambda H(u), & \Theta_1(u+2iK') &= \mu\Theta_1(u).
\end{aligned}$$

Relations entre les σ et les $\Im$.

$$\sigma u = \frac{H(u)}{H'(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_1 u = \frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega}\,e^{-\eta u} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2 u = \frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')}\,e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3 u = \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}\,e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

FONCTIONS $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+K) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+iK') = -i\frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u+iK') = -i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+K+iK') = \frac{-ik'}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u, \qquad \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u.$$

Argument purement imaginaire. — Relation entre $p u$ *et* $\operatorname{sn} u$.

$$\operatorname{sn}(iu \mid K, iK') = i\frac{\operatorname{sn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)},$$

$$\operatorname{cn}(iu \mid K, iK') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)}, \qquad p u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3})}.$$

$$\operatorname{dn}(iu \mid K, iK') = \frac{\operatorname{dn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)}.$$

Valeurs réelles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ *quand* K *et* K′ *sont réels* (*fig.* 7 *bis*).

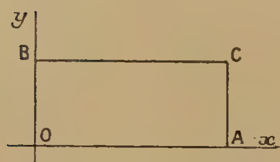
$$OA = K, \qquad OB = K',$$

u	O	A	C	B
$\operatorname{sn} u$	0	1	$\frac{1}{k}$	∞

u	A	O	B
cn	0	1	∞

u	C	A	O	B
dn	0	k'	1	∞

Fig. 7 *bis*.



Formules d'addition.

$$\operatorname{cn} \alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha) \operatorname{dn} \alpha,$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 + k'^2 = 1,$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Dérivées.

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad \sqrt{\frac{2Kg}{\pi}} = \theta_1(0).$$

Si l'on suppose K et K′ liées par la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

on a

$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Développements en séries entières.

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{u^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2\frac{u^2}{1.2} + k^2(4 + k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}$$
$$- k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires.

I. *Généralités sur les fonctions uniformes.*

Pages.

1. Séries entières. Fonction holomorphe en un point. Zéros.............. 1
2. Fonction entière. Cercle de convergence d'une série de Taylor........ 3
3. Fonction uniforme.. 3
4. Points singuliers. Pôles. Résidus. Points singuliers essentiels......... 4
5. Remarque sur les zéros et les pôles.................................. 5
6. Point à l'infini.. 6
7. Théorème fondamental sur les fonctions entières...................... 7

II. — *Fonctions rationnelles.*

8. Objet du paragraphe.. 7
9. Fonction rationnelle particulière.................................... 8
10. Cas général. Pôles et zéros. Ordre.................................. 9
11. Formes analytiques principales des fonctions rationnelles........... 9
12. Remarque.. 11
13. Relation algébrique entre deux fonctions rationnelles. Théorème d'addition algébrique... 12

III. — *Fonctions trigonométriques.*

14. Objet du paragraphe... 13
15. Fonction $\sin u$; sa définition par un produit infini. Fonctions $\cot u$ et $\frac{1}{\sin^2 u}$; leurs expressions par des séries. Périodicité de ces fonctions.. 13
16. Fonctions trigonométriques en général............................... 17

CHAPITRE II.

Généralités sur les fonctions elliptiques.

I. — *Théorèmes généraux.*

17. Définition.. 19
18. Parallélogrammes des périodes....................................... 20
19. Théorème fondamental.. 22
20. Une fonction elliptique a un nombre limité de pôles dans un parallélogramme élémentaire.. 23

Pages.

21. Fonctions σ, ζ, p, Z, H 24
22. Remarque 30
23. Cas de dégénérescence 31

II. — *Première expression des fonctions elliptiques. Décomposition en éléments simples. Conséquences.*

24. Cas des pôles simples 32
25. La somme des résidus d'une fonction elliptique en tous les pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle 34
26. Formule de décomposition en éléments simples dans le cas où certains pôles sont multiples 34
27. Formule de décomposition en éléments simples avec les notations de Weierstrass 37
28. Remarques 37
29. Règle pratique pour la décomposition d'une fonction elliptique $f(u)$ en éléments simples 38
30. Il ne peut pas exister de fonctions elliptiques ayant un seul pôle dans un parallélogramme, si ce pôle est du premier ordre 39
31. Exemple. Décomposition de p^2u en éléments simples 40
32. Relation algébrique entre pu et sa dérivée $p'u$ 42
33. Développements en séries de puissances de pu, ζu, σu 43
34. Inversion dans les notations de Weierstrass 45
35. Intégration d'une fonction elliptique 45
36. Homogénéité 46
37. Cas de dégénérescence 47

III. — *Deuxième forme des fonctions elliptiques. Décomposition en facteurs. Conséquences.*

38. Décomposition en facteurs 48
39. Théorème de Liouville 50
40. Notation de Jacobi 51
41. Deux fonctions elliptiques ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis ne diffèrent que par un facteur constant 52
42. Ordre d'une fonction elliptique 52

IV. — *Exemples de décomposition en facteurs et en éléments simples. Formule d'addition algébrique pour pu. Conséquences.*

43. Décomposer en facteurs la fonction doublement périodique $f(u) = pu - pv$, où v est une constante 53
44. Formule d'addition pour ζu 54
45. Formule d'addition de la fonction pu 54
46. Décomposition de $p'u$ en facteurs. Discriminant 55
47. Effet de l'addition d'une demi-période à l'argument de pu 58
48. Expressions de $pu - e_\lambda$. Fonctions σ_1, σ_2, σ_3 59
49. Toute fonction elliptique $f(u)$ aux périodes 2ω et $2\omega'$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$ 60
50. Remarque sur l'intégration d'une fonction elliptique supposée mise sous la forme d'une fonction rationnelle de p et p' 62

Pages.
51. Entre deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $f_1(u)$ aux mêmes périodes existe une relation algébrique..... 63
52. Toute fonction elliptique $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique..... 65
Exercices sur le Chapitre II..... 66

CHAPITRE III.

Étude des valeurs réelles de pu lorsque ω est réel et ω' purement imaginaire. Applications.

53..... 72

I. — *Valeurs réelles de pu quand ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs.*

54. Les invariants g_2 et g_3 sont alors réels..... 72
55. Valeurs réelles de l'argument..... 73
56. Argument purement imaginaire..... 74
57. Racines e_1, e_2, e_3..... 76
58. Autres valeurs de u rendant pu réelle..... 76
59. Résumé..... 79

II. — *Étude de la cubique définie par les équations $x = pu$, $y = p'u$. Lemniscate.*

60. Cas général..... 79
61. Condition pour que trois points soient en ligne droite..... 80
62. Formule d'addition..... 81
63. Tangentes menées d'un point de la courbe..... 84
64. Condition pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe d'ordre n..... 85
65. Cas particulier où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels. Forme de la courbe. Nature de l'argument donnant des points réels..... 89
66. Dégénérescence. Cas d'un point double..... 92
67. Rectification de la lemniscate..... 93

III. — *Pendule sphérique. Corps pesant de révolution. Élastique gauche.*

68. Pendule sphérique..... 95
69. Corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe..... 101
70. La courbe élastique gauche..... 105
Exercices sur le Chapitre III..... 107

CHAPITRE IV.

Étude spéciale des notations de Jacobi.

I. — *Fonctions de Jacobi.*

71. Objet du Chapitre..... 111
72. Périodes..... 111

Pages.
73. Développement en série simple de la fonction $Z(u)$. Valeur de δ..... 112
74. Fonction H........ 115
75. Développement de $H(u)$ en série trigonométrique........ 117
76. Fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 de Jacobi........ 119
77. Zéros des fonctions H, H_1, Θ, Θ_1........ 122
78. Formules relatives à l'addition d'une période ou d'une demi période.. 122
79. Addition d'un nombre entier de périodes........ 124
80. Développements de H_1, Θ, Θ_1 en produits infinis simples........ 125
81. Relation $\frac{2K}{\pi} H'(o) = H_1(o)\Theta(o)\Theta_1(o)$........ 127
82. Formules relatives à l'échange de K et K'........ 128
83. Principales notations usitées pour les fonctions de Jacobi........ 131
84. Relations entre les σ et les $\Im$........ 132

II. — *Fonctions* sn u, cn u, dn u.

85. Définitions........ 132
86. Addition d'une période ou d'une demi-période........ 133
87. Construction, à l'aide des fonctions sn, cn, dn, de fonctions elliptiques aux périodes 2ω et $2\omega'$ ou $2K$ et $2iK'$........ 134
88. Périodicité; zéros; pôles des fonctions sn, cn, dn........ 134
89. Formule d'addition préliminaire........ 135
90. Relations entre les fonctions sn u, cn u, dn u........ 136
91. Module. Module complémentaire........ 136
92. Formules d'addition pour sn u, cn u et dn u........ 137
93. Dérivées des fonctions sn u, cn u, dn u. Multiplicateur........ 139
94. Expression du multiplicateur en fonction des périodes. Choix de périodes $2K$ et $2iK'$ telles que le multiplicateur soit égal à l'unité.. 139
95. Dérivées successives........ 140
96. Développements en séries entières........ 141
97. Dérivées des fonctions inverses. Première idée de l'inversion à l'aide des fonctions de Jacobi........ 141
98. Dégénérescence........ 143
99. Relation entre pu et sn u........ 144
100. Théorème........ 146
101. Développements de η et de η' en séries........ 147
102. Exemples de décomposition en éléments simples et d'intégration...... 148
103. Notations d'Abel........ 151
Exercices sur le Chapitre IV........ 152

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES VALEURS RÉELLES DE sn u, cn u, dn u, QUAND K ET K' SONT RÉELS. APPLICATIONS.

I. — K *et* K' *sont réels.*

104. Le module est réel et moindre que 1........ 155
105. Argument réel........ 155
106. Argument de la forme $v + iK'$, v réel........ 156
107. Argument purement imaginaire........ 156

Pages.
108. Argument de la forme $K + iu$, u réel ... 158
109. Résumé ... 159
110. Expression des périodes par des intégrales définies ... 160
111. Relations entre K, K′ et k ... 161
112. Inversion ... 163
113. Expression de K par une série hypergéométrique ... 163
114. Valeurs réelles de pu dans le cas où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, rattachées à celles de $\operatorname{sn}^2 u$ ... 164

II. — *Biquadratique gauche. Surface des ondes.*

115. Équations de la biquadratique ... 168
116. Forme de la courbe ... 170
117. Condition pour que quatre points de la courbe soient dans un même plan ... 171
118. Plans osculateurs menés à la courbe par un point de la courbe ... 173
119. Détermination des surfaces du second ordre passant par la biquadratique ... 174
120. Équation de la surface des ondes ... 176
121. Expression des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres elliptiques ... 179
122. Les 16 points de ramification de la représentation elliptique ... 181
123. Les deux nappes réelles de la surface ... 183
124. Distribution des courbes paramétriques sur les nappes réelles de la surface ... 186
125. Permutation des couples paramétriques à la suite d'un circuit autour d'un point de ramification réel ... 188
126. Les 32 transformations homographiques de la surface en elle-même ... 190
127. Points singuliers de la surface ... 192
128. Plans tangents singuliers ... 194

III. — *Pendule simple. Élastique plane. Corde à sauter. Mouvement à la Poinsot.*

129. Pendule simple ... 199
130. Élastique plane sans pression ... 202
131. Corde à sauter ... 207
132. Mouvements à la Poinsot ... 211
133. Herpolhodie ... 218
134. Vitesses de rotation autour des axes fixes ... 224
135. Les neuf cosinus déduits de l'équation de l'herpolhodie ... 224

IV. — *Polygones de Poncelet.*

136. Remarques générales ... 227
137. Théorème préliminaire de Géométrie ... 227
138. Premier cas de figure : Introduction des fonctions elliptiques ... 228
139. Condition de fermeture ... 231
140. Généralisation de Jacobi ... 235

Pages.
141. Deuxième cas : les cercles se coupent........ 236
142. Interprétation par un pendule simple........ 238
143. Troisième cas : le cercle O_1 est extérieur à O........ 238
Exercices sur le Chapitre V........ 244

CHAPITRE VI.

FONCTION $\wp$ A PÉRIODES IMAGINAIRES CONJUGUÉES. DISCRIMINANT NÉGATIF.

I. — *Le discriminant est négatif. Valeurs réelles de $\wp u$ et de $\wp' u$.*

144. Objet de ce paragraphe........ 247
145. Les invariants sont réels........ 247
146. Arguments réels, purement imaginaires, imaginaires conjugués........ 247
147. Parmi les racines e_1, e_2, e_3, l'une l_2 est réelle, et les deux autres imaginaires conjuguées. Le discriminant est négatif........ 250
148. Valeurs de u pour lesquelles $\wp u$ et $\wp' u$ sont réelles toutes les deux. Résumé........ 251

II. — *Expression des périodes par des intégrales définies de la forme normale de Legendre, dans le cas du discriminant négatif.*

149. Expression des périodes en fonction des invariants........ 253
150. Les intégrales donnant les valeurs de ω_2 et $\frac{\omega'_2}{i}$ ramenées à la forme canonique de Legendre........ 253
151. Variation du rapport $\frac{i\omega_2}{\omega'_2}$........ 256

III. — *Retour à la fonction $\wp$ à discriminant positif. Expressions des périodes sous la forme canonique de Legendre.*

152. Les intégrales qui définissent les périodes ramenées à la forme canonique de Legendre........ 257
153. Variation du rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$........ 259

IV. — *Cas du discriminant négatif. Application géométrique.*

154. Étude de la courbe $x = \wp u$, $y = \wp' u$, $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$........ 260

V. — *Discriminant négatif; application au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse.*

155. Équations différentielles et intégrales premières........ 262
156. Intégration par les fonctions elliptiques........ 265
157. Développement de y et de t en séries entières ordonnées suivant les puissances de $u = \frac{gx}{w^2}$........ 268

CHAPITRE VII.

Intégrales elliptiques. Réduction a la forme normale de Legendre et de Jacobi. Inversion.

I. — *Intégrales elliptiques.*

Pages.
158. Exemple élémentaire de la méthode employée pour calculer les intégrales elliptiques 270
159. Intégrales elliptiques 271
160. Premières réductions de l'intégrale elliptique 272

II. — *Forme normale de Legendre. Intégrales de Jacobi.*

161. Forme normale de Legendre 272
162. Intégrales de première, deuxième et troisième espèce, d'après Legendre et Jacobi 274

III. — *Réduction à la forme normale de Legendre.*

163. Cas d'un polynome bicarré 277
164. Réduction à la forme normale en quantités réelles, dans le cas d'un polynome bicarré de la forme $A(x^2+\alpha)(x^2+\beta)$; A, α et β étant réels 278
165. Réduction à la forme canonique de Legendre en quantités réelles quand y est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré 281
166. Cas où le polynome sous le radical est du troisième degré 283

CHAPITRE VIII.

Réduction à la forme normale de Weierstrass. Inversion.

I. — *Le polynome sous le radical est du troisième degré.*

167. Réduction à la forme normale 284
168. Inversion de l'intégrale elliptique lorsque les invariants sont réels 285

II. — *Le polynome sous le radical est du quatrième degré. Premier mode de réduction où l'on ne s'occupe pas de la réalite.*

169. Cas particulier 289
170. Le cas général ramené au cas particulier précédent 290
171. Règle 292

III. — *Inversion en quantités réelles. Discriminant positif.*

172. Expression elliptique des racines d'un polynome du quatrième degré. 293
173. Discussion relative à la réalité des racines. Cas où le discriminant est positif 294
174. Inversion en quantités réelles 296
175. Résumé 299

IV. — *Inversion en quantités réelles. Discriminant négatif.*

Pages.

176. Racines de F (z)........ 300
177. Inversion en quantités réelles........ 301
178. Résumé........ 303

V. — *Méthode d'Hermite.*

179. Méthode générale........ 303

CHAPITRE IX.

Applications diverses traitées avec la notation de Weierstrass.

I. — *Courbe élastique plane et sans pression.*

180. Mise en équations........ 306
181. Intégration par les fonctions elliptiques........ 307
182. Inversion........ 308
183. Nature de l'argument........ 310
184. Expressions de x et de y........ 311
185. Intervalle dans lequel il suffit de faire varier t........ 312
186. Construction de la courbe........ 313

II. — *Prisme droit chargé debout.*

187. Énoncé de la question........ 315
188. Nombre de solutions........ 316

III. — *Courbe élastique plane sous pression normale uniforme.*

189. Énoncé et mise en équation........ 317
190. Tableau de formules........ 320
191. Intégration par les fonctions elliptiques........ 321
192. Inversion........ 322
193. Nature des arguments........ 324
194. Intervalle dans lequel il suffit de faire varier t........ 325
195. Variation de r^2........ 326
196. Variation de l'angle polaire........ 327
197. Angle des rayons allant à deux sommets consécutifs........ 328
198. Signe du rayon de courbure........ 331
199. Forme de la courbe........ 334

IV. — *Surfaces homofocales. Coordonnées elliptiques.*

200. Surfaces homofocales à un ellipsoïde et passant par un point donné.. 335
201. Coordonnées elliptiques........ 337
202. Longueur d'un arc infiniment petit........ 337
203. Les coordonnées λ, μ, ν remplacées par des arguments elliptiques. Les coordonnées cartésiennes s'expriment par des fonctions uniformes de ces arguments........ 338

V. — *Application à la théorie de la chaleur.*

Pages.

204. Les surfaces homofocales à un ellipsoïde sont des surfaces isothermes. Chacun des arguments u, v, w est un paramètre thermométrique.. 341
205. Équation de la chaleur quand les variables sont les arguments u, v, w. 345
206. Solutions dépendant d'une équation de Lamé.... 348
Exercice.. 349

CHAPITRE X.

TRANSFORMATION DE LANDEN.

207. Division de la période par 2ω.................................... 350
208. Relations entre les modules et les multiplicateurs........ 351
209. Relations entre les intégrales K et K_1........................ 352
210. Calcul de K quand k est donné......... 353
211. Calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ quand k et φ sont donnés 355
Exercices sur le Chapitre X.. 360

CHAPITRE XI.

FONCTIONS A MULTIPLICATEURS CONSTANTS OU FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE.

212. Définitions........................... 362

I. — *Décomposition en facteurs. Conséquences.*

213. Expression générale des fonctions à multiplicateurs constants........ 364
214. Décomposition en facteurs.. 365
215. Nombre minimum de pôles d'une fonction à multiplicateurs constants. 367
216. Fonctions à multiplicateurs spéciaux................................ ... 368

II. — *Décomposition en éléments simples..*

217. Élément simple.. 369
218. Formule de décomposition. Cas des pôles simples.................... 371
219. Cas des pôles multiples.......................... 373
220. Méthode d'Hermite.............................. 375
221. Multiplicateurs spéciaux.. 376

III. — *Équation de Lame. Équations de M. Picard.*

222. Équation de Lamé.. 378
223. Forme de l'équation de Lamé dans les notations de Weierstrass....... 379
224. Intégration de l'équation de Lamé pour $n = 1$.......................... 380
225. Équations de M. Picard.. 381
226. Retour à l'équation de Lamé.............. 384

CHAPITRE XII.

Fonctions a multiplicateurs exponentiels ou fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

Pages.

227. Définition ... 387
228. Simplification des relations que vérifie une fonction à multiplicateurs exponentiels ... 388
229. Exemple du cas $N = 1$ ... 389

I. — *Décomposition en facteurs. Conséquences.*

230. Première expression d'une fonction doublement périodique de troisième espèce ... 390
231. Cas de N positif ... 391
232. Cas de N négatif ... 395

II. — *Décomposition en éléments simples.*

233. Étude de l'élément simple ... 396
234. Décomposition en éléments simples dans le cas où N est négatif, $N = -m$ ... 399
235. Exemple ... 403
236. Formule de décomposition dans le cas de N positif, $N = m$ ... 405
237. Résumé ... 406

CHAPITRE XIII.

Notions sur les fonctions modulaires.

I. — *L'invariant absolu* $J(\tau)$.

238. Couples de périodes équivalentes ... 407
239. Réseaux de parallélogrammes équivalents ... 410
240. L'invariant absolu J ... 410
241. La fonction $J(\tau)$ est holomorphe dans le demi-plan positif ... 411
242. Propriété fondamentale de la fonction $J(\tau)$ ... 412

II. — *Le groupe modulaire et son domaine fondamental.*

243. Substitutions linéaires ... 413
244. Propriété géométrique des substitutions linéaires ... 415
245. Le groupe modulaire ... 416
246. Le domaine fondamental du groupe modulaire ... 417
247. Théorème I ... 419
248. Théorème II ... 421
249. Théorème III ... 422
250. Application à $J(\tau)$ ... 423

III. — *Étude de la fonction* $J(\tau)$ *à l'intérieur de son domaine fondamental.*

251. Théorème IV ... 424
252. Théorème V ... 424

Pages.
253. Théorème VI 425
254. Théorème VII 425
255. Établissement d'une égalité fondamentale 426
256. Expression de J (τ) en fonction de k^2 427
257. Développement de J (τ) dans le voisinage de $q = 0$ (ou $\tau = i\infty$) 428
258. Étude des valeurs réelles de J (τ) 429
259. Théorème VIII 430
260. Application à la théorie des fonctions elliptiques 432

IV. — *La fonction modulaire* k^2 (τ).

261. Les fonctions modulaires 432
262. Les six transformations linéaires du module k^2 433
263. Le groupe G et ses substitutions fondamentales 436
264. Le domaine fondamental de la fonction k^2 (τ) 438
265. Distribution des valeurs réelles de k^2 (τ) 440
266. Transformation du premier ordre des fonctions de Jacobi 442
Exercices sur le Chapitre XIII 444

NOTES.

Note I. Démonstration du théorème de Liouville 447
Note II. — Impossibilité de l'existence d'une fonction analytique avec deux périodes dont le rapport est réel 448
Addition à la Note II. — Impossibilité d'une fonction analytique avec trois périodes 450
Note III. — Sur les développements infinis des fonctions circulaires et des fonctions elliptiques 453
I. Développement de $\sin \pi u$ en produit infini 454
II. Formation de l'équation différentielle de la fonction pu 456
Note IV. — Convergence du produit infini qui définit σu 460
Note V. — Sur le développement des fonctions Θ en facteurs 464
Note VI. — Sur le problème de l'inversion 466
1 à 7. Considérations générales 466
8. Retour sur la transformation de Landen 470
9. Remarques sur l'itération de la transformation de Landen pour k complexe 472
10. La transformation S 473
11. Lemme I 474
12. Lemme II 476
13. Lemme III 478
14. Solution du problème de l'inversion pour $|k|$ suffisamment petit. 480
15. Extension au cas d'un module quelconque ($\neq 0, 1, \infty$) 482
Résumé des principales formules 484

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}.
Quai des Grands-Augustins, 55.

64544-22